空間曲面の groupoid rack cocycle 不変量

新井 克典 (大阪大学)*

1 空間曲面

空間 3 価グラフ (spatial trivalent graph) とは, S^3 に埋め込まれた有限 3 価グラフのことである.

Y 向き付けられた空間 3 価グラフ (Y-oriented spatial trivalent graph) とは, 全ての頂点の入次数, 出次数がともに 1 以上であるような有向空間 3 価グラフのことである. ここで入次数とはその頂点を終点としてもつ辺の本数をいい, 出次数とはその頂点を始点としてもつ辺の本数をいう.

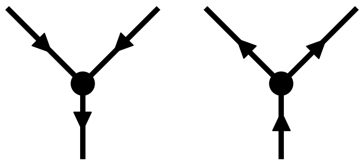

図 1 空間 3 価グラフの Y 向き付け

空間曲面 (spatial surface) [4] とは, 3 次元球面 $S^3 = \mathbb{R}^3 \sqcup \{\infty\}$ に埋め込まれたコンパクト曲面である. 本報告書では次の条件を仮定する.

- 有向である.
- 各連結成分は空でない境界を持つ.
- 2 次元閉円板成分を持たない.

空間曲面 F_1 と F_2 が**同値 (equivalent)** であるとは, F_1 を向きを込めて F_2 に移す S^3 上の全同位が存在することをいい, このとき $F_1 \cong F_2$ と書く.

原点を中心とする単位球面 S^2 に, 原点から無限遠点 ∞ へ向かう向きを正の法線方向とする向きを与える. $S^2 = \mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$ 上の空間 3 価グラフ図式 D に対して, S^2 上での正則近傍 $N(D)$ を取る. D の各上方弧の近傍に対応する $N(D)$ の部分集合を S^2 の正の法線方向に沿って全同位で動かすことで曲面 F を得る. F は各交差近傍を除いて S^2 上にあるので, S^2 から誘導される向きを与え, 空間曲面 F を得る (図 2). 任意の空間曲面は図 2 の方法で得られるある空間曲面と同値である. このとき, 空間曲面 F の**図式 (diagram)** を空間 3 価グラフ図式 D で定める.

定理 1.1. ([4]). F_1 と F_2 を空間曲面とし, D_1 と D_2 をそれぞれ F_1 と F_2 の図式とする.

* 〒560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-1 大阪大学大学院理学研究科
e-mail: `u068111h@ecs.osaka-u.ac.jp`

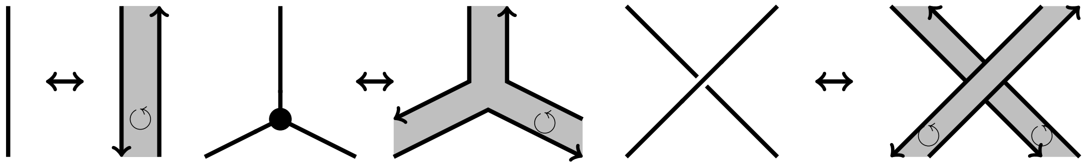

図 2　空間 3 価グラフ図式から有向空間曲面を得る方法

このとき, F_1 と F_2 が同値であることと D_1 と D_2 が空間曲面図式のライデマイスター変形 (図 3) と S^2 上のアイソトピー変形を有限回施して移り合うことは同値である.

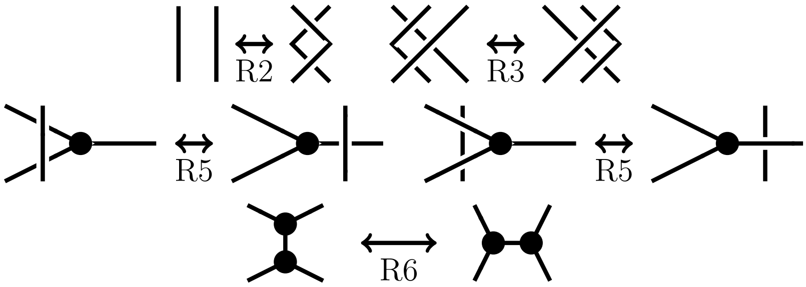

図 3　空間曲面図式のライデマイスター変形

補題 1.2. Y 向き付けられた空間曲面図式のライデマイスター変形は有向ライデマイスター変形 R2, R3 および図 4 の変形で生成される.

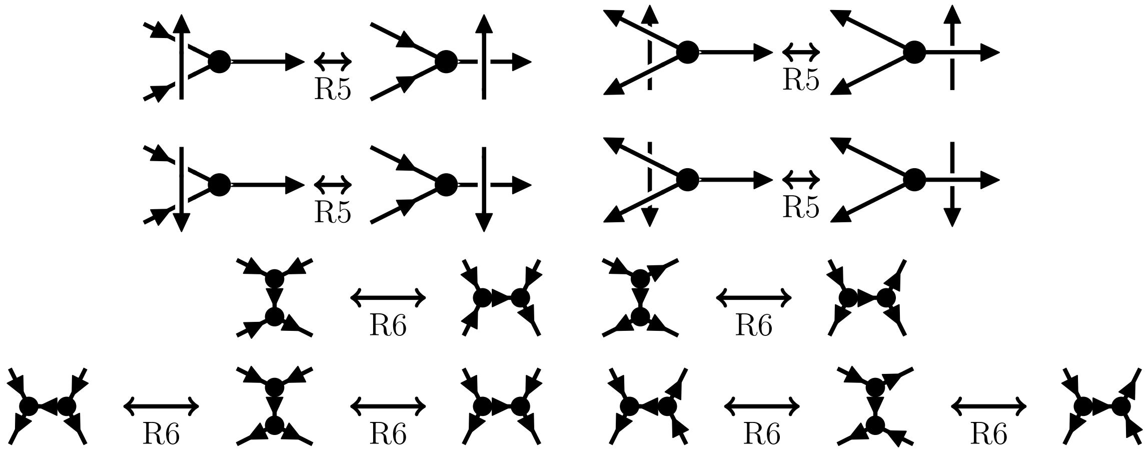

図 4　Y 向き付けられた空間曲面図式の R5 および R6 変形

定理 1.3. **([5]).** F_1 と F_2 を空間曲面とし, D_1 と D_2 をそれぞれ F_1 と F_2 の Y 向き付けられた空間曲面図式とする. このとき, F_1 と F_2 が同値であることと D_1 と D_2 が Y 向き付けられた空間曲面図式のライデマイスター変形および S^2 上のアイソトピー変形を有限回施して移り合うことは同値である.

2 Groupoid rack

2.1 ラックとラック彩色

定義 2.1. **(**[2,3,6]**).** 空でない集合 X とその上の 2 項演算 $*: X\times X \ni (x,y)\mapsto x*y\in X$ の組 $X=(X,*)$ が**ラック (rack)** であるとは, $*$ が次の条件を満たすことをいう.

2. 任意の $y\in X$ に対して, 写像 $S_y: X\ni x\mapsto x*y\in X$ は全単射である.
3. 任意の $x,y,z\in X$ に対して, $(x*y)*z=(x*z)*(y*z)$ を満たす.

特に, ラック X が次の条件を満たすとき $X=(X,*)$ を**カンドル (quandle)** という.

1. 任意の $x\in X$ に対して, $x*x=x$ を満たす.

ラックの公理 2 および 3 はそれぞれ有向ライデマイスター変形 R2 および R3 変形に対応し, カンドルの公理 1, 2 および 3 はそれぞれ有向ライデマイスター変形 R1, R2 および R3 に対応している.

$X=(X,*)$ をラックとする. 任意の $x,y\in X$ と任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対して, $S_y^n(x)$ を $x*^n y$ で表す. ただし, $S_y^0=\mathrm{id}_X$ である.

定義 2.2. **(**[3,6]**).** X をラック, D を有向絡み目図式とし, $\mathcal{A}(D)$ を D の弧全体の集合とする. 写像 $C:\mathcal{A}(D)\to X$ が D の X **彩色 (**X**-coloring)** であるとは, D の各交差で図 5 の条件を満たすことである. X 彩色全体の集合を $\mathrm{Col}_X(D)$ と書く.

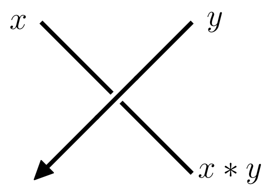

図 5 ラック彩色条件 $(x,y\in X)$

命題 2.3. **(**[3,6]**).** X をカンドルとし, D_1,D_2 を同値な有向絡み目を表す図式とする. このとき, $\mathrm{Col}_X(D_1)$ と $\mathrm{Col}_X(D_2)$ の間に全単射が存在する. 特に $\mathrm{Col}_X(D_1)$ の濃度 $|\mathrm{Col}_X(D_1)|$ は有向絡み目の不変量である. この不変量を**カンドル彩色数 (quandle coloring number)** という.

2.2 groupoid rack と groupoid rack 彩色

全ての射が同型射であるような圏を**亜群 (groupoid)** と呼ぶ.

定義 2.4. $\mathcal{C}$ を亜群とし, $X=\mathrm{Hom}(\mathcal{C})$ とする. X と X 上の 2 項演算 $*: X\times X\to X$ の組 $X=(X,*)$ が **groupoid rack** であるとは, $*$ が次の条件を満たすことをいう.

1. 任意の $x\in X$ と任意の $f:\lambda\to\mu,\ g:\mu\to\nu$ に対して, $x*(fg)=(x*f)*g,\ x*$

$\mathrm{id}_\lambda = x$ を満たす.

2. 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ を満たす.
3. 任意の $x \in X$ と任意の $f : \lambda \to \mu,\ g : \mu \to \nu$ に対して, $\mathrm{cod}(f * x) = \mathrm{dom}(g * x),\ (fg) * x = (f * x)(g * x)$ を満たす.

groupoid rack の公理 1 および 3 は R2 および R5 変形に対応し, 2 は R3 変形に対応している. また亜群の射の結合法則は R6 変形に対応している.

定義 2.5. X を groupoid rack とし, D を Y 向き付けられた空間曲面図式とする. 写像 $C : \mathcal{A}(D) \to X$ が X **彩色 (X-coloring)** であるとは, 各交差と各 3 価頂点で図 6 の条件を満たすことをいう. X 彩色全体の集合を $\mathrm{Col}_X(D)$ と書く.

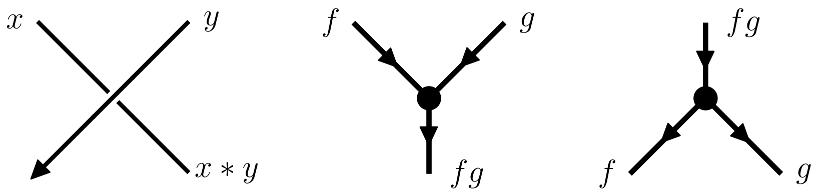

図 6 groupoid rack 彩色条件 $(x, y, f, g \in X,\ \mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g))$

定理 2.6. X を groupoid rack とし, D_1 と D_2 を同値な空間曲面の Y 向き付けされた図式とする. このとき, $\mathrm{Col}_X(D_1)$ と $\mathrm{Col}_X(D_2)$ の間に全単射が存在する. 特に $\mathrm{Col}_X(D_1)$ の濃度 $|\mathrm{Col}_X(D_1)|$ は空間曲面の不変量である.

groupoid rack X に対して, $Y (\neq \emptyset)$ が X **集合 (X-set)** であるとは写像 $\star : Y \times X \to Y$ が次の条件を満たすことをいう.

- 任意の $v \in Y$ と任意の $f, g \in X$ $(\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g))$ に対して,

$$v \star (fg) = (v \star f) \star g \text{ かつ } v \star \mathrm{id}_\xi = x$$

  を満たす. ここで id_ξ は対象 ξ に関する恒等射である.
- 任意の $v \in Y$ と任意の $x, y \in X$ に対して,

$$(v \star x) \star y = (v \star y) \star (x * y)$$

定義 2.7. X を groupoid rack, Y を X 集合, D を Y 向き付けられた空間曲面図式とする. 写像 $C : \mathcal{A}(D) \sqcup \mathcal{R}(D) \to X \sqcup Y$ が (X, Y) **彩色 ((X, Y)-coloring)** であるとは次の条件を満たすことをいう.

- $C|_D$ は D の X 彩色である.
- $C|_{\mathcal{R}(D)} : \mathcal{R}(D) \to Y$ が図 7 の条件を満たす.

$\mathrm{Col}_{(X,Y)}(D)$ を D の (X, Y) 彩色全体の集合とする.

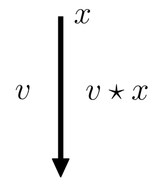

図 7　groupoid rack 彩色条件 ($v \in Y$, $x \in X$)

定理 2.8. X を groupoid rack, Y を X 集合とする．D_1 と D_2 はそれぞれ同値な空間曲面を表す Y 向き付けられた図式であるとする．このとき, $\mathrm{Col}_{(X,Y)}(D_1)$ と $\mathrm{Col}_{(X,Y)}(D_2)$ の間に全単射が存在する．特に, $\left|\mathrm{Col}_{(X,Y)}(D_1)\right|$ は空間曲面の不変量である．

3 Groupoid rack (co)homology

このセクションでは, [1] と類似の方法で groupoid rack (co)homology を導入する．

以下では特に断らない限り, $\mathcal{C}$ を亜群, $X = \mathrm{Hom}(\mathcal{C})$ を groupoid rack, Y を X 集合とする．

$\mathbb{Z}$ 加群 $C_n(X)_Y$ を次で定義する．

$$C_n(X)_Y := \begin{cases} \mathbb{Z}\left[\displaystyle\bigsqcup_{n_1+\cdots+n_k=n} Y \times \prod_{i=1}^{k}\left(\bigsqcup_{(\lambda_0,\cdots,\lambda_{n_i})\in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\times\cdots\times \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}\right)\mathrm{Hom}(\lambda_0,\cdots,\lambda_{n_i})\right] & (n \in \mathbb{Z}_{>0}) \\ 0 & (n \in \mathbb{Z}_{\le 0}) \end{cases}$$

ここで,

$$\mathrm{Hom}(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n) := \mathrm{Hom}(\lambda_0,\lambda_1)\times \mathrm{Hom}(\lambda_1,\lambda_2)\times\cdots \mathrm{Hom}(\lambda_{n-1},\lambda_n)$$

である．

$C_n(X)_Y$ の元 $(v; x_{1,1},\ldots,x_{1,n_1};\ldots;x_{k,1},\ldots,x_{k,n_k})$ を $\langle v\rangle\langle x_{1,1},\ldots,x_{1,n_1}\rangle\cdots\langle x_{k,1},\ldots,x_{k,n_k}\rangle$ で表すこととする．　また, $\mathrm{Hom}(\lambda_0,\ldots,\lambda_n)$ の元 $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)$ に対して, $\langle\mathbf{x}\rangle := \langle x_1,\ldots,x_n\rangle$ と定める．$\mathbf{x} \in \mathrm{Hom}(\lambda_0,\ldots,\lambda_n)$ に対して, $\mathbf{x}$ の長さを $|\mathbf{x}|$ と書く．さらに $\langle v\rangle\langle\mathbf{x}_1\rangle\langle\mathbf{x}_2\rangle\cdots\langle\mathbf{x}_k\rangle \in C_n(X)_Y$ の長さを $|\mathbf{x}_1|+|\mathbf{x}_2|+\cdots+|\mathbf{x}_k|$ で定義し, $|\langle v\rangle\langle\mathbf{x}_1\rangle\langle\mathbf{x}_2\rangle\cdots\langle\mathbf{x}_k\rangle|$ と表す．

$y \in X$ に対して, $\langle\mathbf{x} * y\rangle := \langle x_1 * y,\ldots,x_n * y\rangle$ で定め, $\langle v\star y\rangle\langle\mathbf{x}_1 * y\rangle\langle\mathbf{x}_2 * y\rangle\cdots\langle\mathbf{x}_k * y\rangle$ を $\langle v\rangle\langle\mathbf{x}_1\rangle\langle\mathbf{x}_2\rangle\cdots\langle\mathbf{x}_k\rangle * y$ と表す．ただし, $0 * y := 0$ とする．

また, $\langle v\rangle\langle\mathbf{x}_1\rangle\cdots\langle\mathbf{x}_i\rangle(*y\langle\mathbf{x}_{i+1}\rangle)\cdots\langle\mathbf{x}_k\rangle$ は $\langle v\star y\rangle\langle\mathbf{x}_1 * y\rangle\cdots\langle\mathbf{x}_i * y\rangle\langle\mathbf{x}_{i+1}\rangle\cdots\langle\mathbf{x}_k\rangle$ を表す．

準同型 $\partial_n : C_n(X)_Y \to C_{n-1}(X)_Y$ を次で定義する．

$$\partial_n(\langle v\rangle\langle\mathbf{x}_1\rangle\langle\mathbf{x}_2\rangle\cdots\langle\mathbf{x}_k\rangle) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{k}(-1)^{|\langle v\rangle\langle\mathbf{x}_1\rangle\langle\mathbf{x}_2\rangle\cdots\langle\mathbf{x}_k\rangle|}\langle v\rangle\langle\mathbf{x}_1\rangle\cdots\tilde{\partial}(\langle\mathbf{x}_k\rangle)\cdots\langle\mathbf{x}_k\rangle & (n \in \mathbb{Z}_{>0}) \\ 0 & (n \in \mathbb{Z}_{\le 0}) \end{cases}$$

ここで $\langle \mathbf{x} \rangle = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ に対して $\tilde{\partial}(\langle \mathbf{x} \rangle)$ は

$$\tilde{\partial}(\langle \mathbf{x} \rangle) = *x_1 \left\langle \mathbf{x}^0 \right\rangle + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left\langle \mathbf{x}^i \right\rangle$$

で定義される作用素である．ただし, $0 < i < n$ に対して, $\mathbf{x}^i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n)$ であり, $\mathbf{x}^0 = (x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{x}^n = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ である．$\mathbf{x} = (x_0)$ のとき, $\langle \mathbf{x}^0 \rangle = \langle\rangle$ と定め, $\langle v \rangle \langle \mathbf{x}_1 \rangle \cdots \langle \mathbf{x}_{i-1} \rangle \langle\rangle \langle \mathbf{x}_{i+1} \rangle \cdots \langle \mathbf{x}_k \rangle$ は $\langle v \rangle \langle \mathbf{x}_1 \rangle \cdots \langle \mathbf{x}_{i-1} \rangle \langle \mathbf{x}_{i+1} \rangle \cdots \langle \mathbf{x}_k \rangle$ を表す.

命題 3.1. A をアーベル群とする．このとき, $C_*(X)_Y = (C_n(X)_Y, \partial_n)$ はチェイン複体である．また, $C^*(X; A)_Y = (\mathrm{Hom}(C_n(X)_Y, A), \delta_n)$ はコチェイン複体である．ここで $\delta_n : \mathrm{Hom}(C_n(X)_Y, A) \to \mathrm{Hom}(C_{n+1}(X)_Y, A)$ は $\delta_n(h) = h \circ \partial_{n+1}$ で定義される準同型である.

$H_n(X)_Y = \mathrm{Ker}(\partial_n)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$ を n 次**ホモロジー群 (homology group)** といい, $H^n(X)_Y = \mathrm{Ker}(\delta_n)/\mathrm{Im}(\delta_{n-1})$ を n 次**コホモロジー群 (cohomology group)** という．また, $\mathrm{Ker}(\delta_n)$ の元をシャドウ n コサイクルという.

空間曲面 F の Y 向き付けられた図式 D の (X, Y) 彩色を考える．χ を D 上の交差または頂点, θ: $C_2(X)_Y \to A$ を 2 コサイクルとする．このとき, χ において**ウェイト (weight)** $w_\theta(\chi, C)$ を次で定義する.

$w_\theta(\chi, C) = \theta(\langle v \rangle \langle x \rangle \langle y \rangle)$　$w_\theta(\chi, C) = -\theta(\langle v \rangle \langle x \rangle \langle y \rangle)$　$w_\theta(\chi, C) = \theta(\langle v \rangle \langle f, g \rangle)$　$w_\theta(\chi, C) = -\theta(\langle v \rangle \langle f, g \rangle)$

図 8　$x, y, f, g \in X$ $(\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g))$

D の (X, Y) 彩色 C に対して, ウェイトの総和 $W_\theta(D, C)$ を次で定義する.

$$W_\theta(D, C) = \sum_{\chi:\text{交差}} w_\theta(\chi, C) + \sum_{\chi:\text{頂点}} w_\theta(\chi, C)$$

定理 3.2. 多重集合 $\Phi_\theta(D) = \{W_\theta(D, C) \mid C \in \mathrm{Col}(D)_Y\}$ は空間曲面 F の不変量である.

$\Phi_\theta(D)$ を $\Phi_\theta(F)$ と書き, F の **groupoid rack cocycle 不変量**という.

命題 3.3. $R = (R, *)$ をラック, Y を R 集合, A をアーベル群, $\theta : C_2^R(R)_Y \to A$ をシャドウラック 2 コサイクルとする．このとき, 次が成り立つ.

1. $X = (R \times R, \triangleright)$ は次で定義される二項演算 $\triangleright : X \times X \to X$ により groupoid rack になる.

$$(x, y) \triangleright (z, w) = ((x * z) *^{-1} w, (y * z) *^{-1} w), \quad (x, y)(y, z) = (x, z)$$

2. Y は次で定まる $\tilde{\star}: Y \times X \to Y$ により X 集合になる.

$$v \tilde{\star} (x, y) = (v \star x) \star^{-1} y$$

3. 次で定まる $\tilde{\theta}: C_2(X)_Y \to A$ は groupoid rack 2 コサイクルである.

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(\langle v \rangle \langle (x, y) \rangle \langle z, w \rangle) &= \theta(v, x, z) - \theta((v \star x) \star^{-1} y, y, z) - \theta((v \star z) \star^{-1} w, (x * z) *^{-1} w, w) \\ &\quad + \theta((((v \star x) \star^{-1}) \star z) \star^{-1} w, (y * z) *^{-1} w, w) \\ \tilde{\theta}(\langle v \rangle \langle (x, y), (y, z) \rangle) &= 0_A \end{aligned}$$

参考文献

[1] S. Carter, A. Ishii, M. Saito, and K. Tanaka, *Homology for quandles with partial group operations*, Pacific J. Math. **287** (2017), no. 1, 19–48. MR3613433

[2] R. Fenn and C. Rourke, *Racks and links in codimension two*, J. Knot Theory Ramifications **1** (1992), no. 4, 343–406. MR1194995

[3] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23** (1982), no. 1, 37–65. MR638121

[4] S. Matsuzaki, *A diagrammatic presentation and its characterization of non-split compact surfaces in the 3-sphere*, J. Knot Theory Ramifications **30** (2021), no. 9, Paper No. 2150071, 32.

[5] S. Matsuzaki and T. Murao, *(co)homology of racks and multiple group racks for compact oriented surfaces in the 3-sphere*, 2023.

[6] S. V. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, Mat. Sb. (N.S.) **119(161)** (1982), no. 1, 78–88, 160. MR672410