有限群由来の generalized Alexander quandle について

小坂　迅

概要

群とその自己同型写像の組に対して generalized Alexander quandle を構成することができる. 近年に Higashitani 氏と Kurihara 氏による有限 generalized Alexander quandle の同型類の分類に関する研究がある. 彼らの定理を用いて多くの generalized Alexander quandle を分類できるが, 位数 16 以上の群由来で彼らの定理の仮定を満たさず同型を判定できない quandle が存在する. 本研究では彼らの同型判定定理について, 仮定を除いた形のものを導いた. さらに, この定理を用いてより大きい位数の generalized Alexander quandle について, その同型類を調べた結果について紹介する.

1　Quandle と generalized Alexander quandle

本節では, quandle と generalized Alexander quandle の定義およびその性質などについてまとめる.

1.1　Quandle の定義

定義 1.1 ([5, 6]) 空でない集合 Q 上の二項演算 $*$ が次の 3 条件を満たすとき組 $(\mathrm{Q}, *)$ を **quandle** と呼ぶ.

1. 任意の $x \in \mathrm{Q}$ に対して $x * x = x$ が成立.
2. 任意の $x \in \mathrm{Q}$ に対して $S_x : \mathrm{Q} \ni y \mapsto y * x \in \mathrm{Q}$ で定まる写像は全単射である.
3. 任意の $x,\ y,\ z \in \mathrm{Q}$ に対して $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ が成立.

公理 2 の S_x を x における **point symmetry 写像** と呼ぶ.
$(\mathrm{Q}, *)$ を quandle としたとき, 任意の $x,\ y \in \mathrm{Q}$ と任意の整数 n に対して $S_x^n(y)$ を $y *^n x$ と表す. ここで, $S_x^0 = \mathrm{id}_{\mathrm{Q}}$ とする.

1.2　等質 quandle と generalized Alexander quandle

G を群とし, ψ をその自己同型写像とする. さらに G の部分群 H であって, ψ により任意の元が固定されるような部分群を取る. このとき, 左剰余集合 G/H 上の演

算 $*$ を $xH * yH = y\,\psi(y^{-1}x)H$ で定めると $(G/H, *)$ は quandle になる. この quandle を与える三つ組 (G, H, ψ) を quandle triplet と呼び, この構成で得られる quandle を $\mathrm{Q}(G, H, \psi)$ と表す.

Quandle Q が等質 quandle であるとは Q の自己同型群 Aut(Q) (2.3 節参照) が Q に推移的に作用することをいう. [5, 第 7 章] によると次の集合の間には一対一対応が存在する. ここで $\cong$ は quandle の同型を表す.

$\{\ \mathrm{Q} \mid \mathrm{Q}$ は等質 quandle $\}/\cong \stackrel{1:1}{\longleftrightarrow} \{\ \mathrm{Q}(G, H, \psi) \mid (G, H, \psi)$ は quandle triplet $\}/\cong$

H として自明部分群を取ったものは, いつでも quandle triplet を構成する. この $\mathrm{Q}(G, \psi) = \mathrm{Q}(G, 1, \psi)$ が本稿の主な対象である. 次で定義を与える.

定義 1.2 G を群, $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$ をその自己同型写像とする. このとき G 上の二項演算 $*$ を $x * y = y\,\psi(y^{-1}x)$ で定めると $\mathrm{Q}(G, \psi) = (G, *)$ は quandle になる. この quandle を **generalized Alexander quandle** と呼ぶ.

上の定義で, G が可換群の場合を Alexander quandle と呼ぶ. Generalized Alexander quandle はこれを一般化したものである.

1.3 Quandle と群に関する用語と記法

続いて, 本稿で使用する用語について説明する. 以後 quandle について, 二項演算を明確にするときには $(\mathrm{Q}, *)$ と表し, そうでない場合は単に Q と表す.

$(\mathrm{Q}, *)$, $(\mathrm{Q}', *')$ を quandle とする. このとき, 写像 $f : \mathrm{Q} \to \mathrm{Q}'$ が **quandle 準同型写像**であるとは, 任意の $x, y \in \mathrm{Q}$ に対して, $f(x * y) = f(x) *' f(y)$ が成り立つことをいう. さらに, quandle 準同型写像 f が全単射であるとき, f を **quandle 同型写像** と呼ぶ. Q と Q′ の間に quandle 同型写像が存在するとき, Q と Q′ は同型であるといい, $\mathrm{Q} \cong \mathrm{Q}'$ と表す. 以下に quandle に関する用語をまとめる. ([1] を参照).

- Q の quandle 自己同型写像全体がなす群を, Q の **自己同型群**と呼び Aut(Q) と表す. 任意の $x \in \mathrm{Q}$ に対して point symmetry 写像 S_x は Aut(Q) の元である.
- Q の point symmetry 写像全体 $\{\ S_x \mid x \in \mathrm{Q}\ \}$ により生成される Aut(Q) の部分群 Inn(Q) を Q の **内部自己同型群**と呼ぶ. 詳らかに書くと $\mathrm{Inn}(\mathrm{Q}) = \{\ S_{x_n}^{\pm 1} \circ S_{x_{n-1}}^{\pm 1} \circ \cdots \circ S_{x_1}^{\pm 1} \mid n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathrm{Q}\ \}$ であり, Q が有限の場合には $\mathrm{Inn}(\mathrm{Q}) = \{\ \mathrm{id}_{\mathrm{Q}}, S_{x_n} \circ S_{x_{n-1}} \circ \cdots \circ S_{x_1} \mid n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathrm{Q}\ \}$ である.
- Inn(Q) の Q への自然な作用による $x \in \mathrm{Q}$ の軌道を x の連結成分と呼び, P_x と表す. $P_x = \{\ ((\ldots(x *^{\pm 1} x_1)\ldots) *^{\pm 1} x_{n-1}) *^{\pm 1} x_n \mid n \in \mathbb{N}, x_1, , x_2, \ldots, x_n \in \mathrm{Q}\ \}$ であり, Q が有限の場合には $P_x = \{\ x, ((\ldots(x * x_1)\ldots) * x_{n-1}) * x_n \mid n \in \mathbb{N}, x_1, , x_2, \ldots, x_n \in \mathrm{Q}\ \}$ である.

以下に群に関する用語をまとめる.

- G の自己同型群を Aut(G) と表す. quandle の自己同型群と同じ表記であることに注意する.

- $g \in G$ の位数を $\mathrm{ord}(g)$ と表す.
- $\mathrm{Fix}(\psi, G) = \{ g \in G \mid \psi(g) = g \}$ を $\psi \in \mathrm{Aut(G)}$ による G の固定部分群とする
- 2 つの群 $N,\ H$ と群準同型 $\sigma : H \to \mathrm{Aut}(N),\ h \mapsto \sigma_h$ に対して, (外部) 半直積と呼ばれる群 $N \rtimes_\sigma H$ が定まる. これは, 集合としてはデカルト積 $N \times H$ であり, 演算は $(n_1,\ h_1),\ (n_2,\ h_2) \in N \times H$ に対して, $(n_1,\ h_1) \cdot (n_2,\ h_2) = (n_1 \sigma_{h_1}(n_2),\ h_1 h_2)$ で定義される.

2 Generalized Alexander quandle に関する先行研究

本節では generalized Alexander quandle に関する先行研究について述べる. 証明の詳細については [3] を参照していただきたい.

Generalized Alexander quandle $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}(G, \psi)$ に対して, $P = P(\mathrm{Q})$ を, 単位元 $e \in G$ の連結成分とする. すなわち $P = P_e = \{ (\,(\ldots(e *^{\pm 1} x_1)\ldots) *^{\pm 1} x_{n-1}) *^{\pm 1} x_n \mid n \in \mathbb{N},\ x_1, ,x_2, \ldots, x_n \in \mathrm{Q} \}$ である. P について次が成り立つ.

命題 2.1 ([3, Proposition 3.2])

(i) P は $\mathrm{Q}(G, \psi)$ の subquandle である.

(ii) ψ の P への制限 $\psi|_P$ は subquandle P の quandle 自己同型写像である.

$e = e\,\psi(e^{-1}e) = e * e \in P$ と 命題 2.1 (i) より, subquandle P における単位元 $e \in G$ の連結成分 $P^2 = \{ (\,(\ldots(e *^{\pm 1} x_1)\ldots) *^{\pm 1} x_{n-1}) *^{\pm 1} x_n \mid n \in \mathbb{N},\ x_1, ,x_2, \ldots, x_n \in \mathrm{P} \}$ を考えることができる. P と P^2 について次が成り立つ.

命題 2.2 ([3, Proposition 3.3])

(i) P は G の正規部分群である.

(ii) P^2 は P の正規部分群である.

次の定理 2.3 は, 定理 2.7 ([3, Theorem 1.4]) の証明に用いられる. また, 次章の主定理 3.1 の証明でもこの定理を使用する.

定理 2.3 ([3, Theorem 3.10])
$G,\ G'$ を有限群, $\psi \in \mathrm{Aut}(G),\ \psi' \in \mathrm{Aut}(G')$ をその自己同型写像とし,
$\mathrm{Q} = \mathrm{Q}(G, \psi),\ \mathrm{Q}' = \mathrm{Q}(G', \psi'),\ P = P(\mathrm{Q}),\ P' = P(\mathrm{Q}')$ とおく.
$\mathrm{Q} \cong \mathrm{Q}'$ を仮定し, $f : \mathrm{Q} \to \mathrm{Q}'$ を quandle 同型写像で $f(e) = e'$ をみたすものとする. このとき以下が成り立つ :

(i) $f \circ \psi = \psi' \circ f$.

(ii) $f|_P : P \to P'$ は群同型写像.

(iii) $f|_P : \mathrm{Q}(P, \psi|_P) \to \mathrm{Q}(P', \psi'|_{P'})$ は quandle 同型写像.

(iv) $f(xP) = f(x)P'$

この定理で仮定した f に関する条件 $f(e) = e'$ は次の命題により保証される.

命題 2.4
$\mathrm{Q} = \mathrm{Q}(G, \psi)$, $\mathrm{Q}' = \mathrm{Q}(G', \psi')$ を generalized Alexander quandle とし, $\mathrm{Q} \cong \mathrm{Q}'$ を仮定する. このとき, $f(e) = e'$ を満たす quandle 同型写像 $f : \mathrm{Q} \to \mathrm{Q}'$ を取ることができる.

証明
任意の $a \in G'$ に対して $L_a : G' \to G'$, $x \mapsto ax$ で定まる写像は quandle 自己同型写像である. なぜならば, L_a の全単射性は明らかであり, 任意の x, $y \in G'$ に対して, $L_a(x * y) = ay\,\psi'(y^{-1}x) = ay\,\psi'((ay)^{-1}ax) = L_a(x) * L_a(y)$ が成り立つからである. このことから, quandle 同型写像 $f : \mathrm{Q} \to \mathrm{Q}'$ を, 合成 $L_{f(e)^{-1}} \circ f$ に取り換えることで, 条件を満たす quandle 同型写像を得ることができる. □

次の命題 2.5, 命題 2.6 は generalized Alexander quandle の同型類を分類する上で有用である.

命題 2.5 ([4, Proposition 3.5])
ψ, $\psi' \in \mathrm{Aut}(G)$ とし, $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}(G, \psi)$, $\mathrm{Q}' = \mathrm{Q}(G, \psi')$ とする. このとき, ψ と ψ' が $\mathrm{Aut}(G)$ において共役であるならば, $\mathrm{Q} \cong \mathrm{Q}'$ が成り立つ.

この命題により generalized Alexander quandle の同型類を考える際には, $\mathrm{Aut}(G)$ の共役の違いは除いてよいことが分かる.

命題 2.6 (c.f. [4, Theorem 4.5])
$\psi \in \mathrm{Aut}(G)$, $\psi' \in \mathrm{Aut}(G')$ とし, $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}(G, \psi)$, $\mathrm{Q}' = \mathrm{Q}(G', \psi')$ とする. このとき, $\mathrm{Q} \cong \mathrm{Q}'$ であるならば, 以下が成り立つ.

- $\mathrm{ord}(\psi) = \mathrm{ord}(\psi')$
- $|\mathrm{Fix}(\psi, G)| = |\mathrm{Fix}(\psi', G')|$
- $\mathrm{Inn}(\mathrm{Q}) \cong \mathrm{Inn}(\mathrm{Q}')$

[4, Theorem 4.5] では $G = G'$ の場合を考えているが, $G \neq G'$ の場合にも同様の議論で命題 2.6 が証明される.

この節の最後に, 先行研究における主定理である, 有限 generalized Alexander quandle に関する同型判定の定理を紹介する. この定理では, generalized Alexander quandle に次の条件 $(P1)$, $(P2)$ の両方を課している.

$(P1)$ P^2 は G の正規部分群である.

$(P2)$ $P^2 = \{\, S_p(e) \mid p \in P \,\}$ が成り立つ.

これらの条件は独立であり, generalized Alexander quandle の不変量である [3, Proposition 3.16]. また, これらの条件を満たさない例については [3, Remark 3.15] で紹介されている. 本稿でも第 4 章でその例について触れる.

定理 2.7 ([3, Theorem 1.4])
G, G' を有限群, $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$, $\psi' \in \mathrm{Aut}(G')$ をその自己同型写像とし,
$\mathrm{Q} = \mathrm{Q}(G, \psi)$, $\mathrm{Q}' = \mathrm{Q}(G', \psi')$, $P = P(\mathrm{Q})$, $P' = P(\mathrm{Q}')$ とおく.
Q , Q′ は条件 $(P1)$, $(P2)$ を満たすと仮定する. このとき, 次の (1) と (2) は同値である.

(1) $\mathrm{Q} \cong \mathrm{Q}'$

(2) 以下の条件を満たす :

(i) $|G| = |G'|$.

(ii) $|\mathrm{Fix}(\psi, G)| = |\mathrm{Fix}(\psi', G')|$.

(iii) ある群同型写像 $h : P \to P'$ が存在して, 次の (A) と (B) を満たす.

(A) $h \circ \psi|_P = \psi'|_{P'} \circ h$.

(B) 任意の $a \in G$ に対して, ある $a' \in G'$ が存在し, $h(e * a) = e' * a'$ を満たす.

定理 2.7 と命題 2.6 の不変量などを用いることで, 位数 15 以下の generalized Alexander quandle に関して, その同型類のリストを得ることができる. ここで, 位数 n の generalized Alexander quandle の同型類の集合を次で定める.

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{GAQ}}(n) = \{\ \mathrm{Q}(G, \psi)\ \mid\ G \text{ は位数 } n \text{ の群}, \ \psi \in \mathrm{Aut}(G)\ \} / \cong$$

定理 2.8 ([3, Theorem 1.8])
15 以下の自然数 n に対して, $|\mathcal{Q}_{\mathrm{GAQ}}(n)|$ の表は次で与えられる.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\lvert\mathcal{Q}_{\mathrm{GAQ}}(n)\rvert$	1	1	2	3	4	3	6	9	11	5	10	11	12	7	8

表 1. List of $|\mathcal{Q}_{\mathrm{GAQ}}(n)|$

位数 16 以降では, 条件 $(P1)$ または $(P2)$ を満たさず, 定理 2.7 により同型を判別できない組が存在する. 次章で述べる主結果ではそれらの組の同型を判別することが可能である. 詳しくは第 4 章で述べる.

3 主結果

本節では主結果である generalized Alexander quandle に関する同型判定の定理 3.1 について述べる. この定理は, 定理 3.7 ([3, Theorem 1.4]) で課していた条件 $(P1)$, $(P2)$ を取り除いたものになっている. 証明は [3, Theorem 1.4] の議論に基づいている.

定理 3.1 (主定理)
G, G' を有限群, $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$, $\psi' \in \mathrm{Aut}(G')$ をその自己同型写像とし,
$\mathrm{Q} = \mathrm{Q}(G, \psi)$, $\mathrm{Q}' = \mathrm{Q}(G', \psi')$, $P = P(\mathrm{Q})$, $P' = P(\mathrm{Q}')$ とおく.
このとき, 次の (1) と (2) は同値である.

(1) $\mathrm{Q} \cong \mathrm{Q}'$

(2) ある群同型写像 $h : P \to P'$ が存在して, 次の (A) と (B) を満たす.

  (A) $h \circ \psi|_P = \psi'|_{P'} \circ h$.

  (B) G/P と G'/P' の完全代表系 A と A' が存在し, さらにその間の全単射 $k : A \to A'$ で, 任意の $a \in A$ に対して $h(e * a) = e' * k(a)$ を満たすものが存在する.

証明
(1) $\Longrightarrow$ (2) :

Quandle 同型写像 $f : \mathrm{Q} \to \mathrm{Q}'$ で $f(e) = e'$ を満たすものを取る. h を f の P への制限 $f|_P : P \to P'$ とするとこれは, 定理 2.3 (ii) より群同型写像である. さらに, 定理 2.3 (i) より $(A) : h \circ \psi|_P = \psi'|_{P'} \circ h$ が従う. 任意に取った G/P の完全代表系 A について, k を f の A への制限 $f|_A : A \to f(A)$ とし, さらに $A' = f(A)$ とする. このとき, f の全単射性と定理 2.3 (iv) より A' は G'/P' の完全代表系であることが分かる. これらに関して, 任意の $a \in A$ に対し, $h(e * a) = f(e * a) = f(e) * f(a) = e' * k(a)$ が成り立つ. したがって (B) も従う.

(2) $\Longrightarrow$ (1) :

$h : P \to P'$, $k : A \to A'$ をそれぞれ条件を満たす群同型写像と, 完全代表系 A と A' の間の全単射とする. 任意の $x \in G$ に対して, $x = a_x p_x$ ($\exists ! a_x \in A$, $\exists ! p_x \in P$) と一意的に表すことができる. P が G の正規部分群であることより, $a_x p_x a_x^{-1} \in P$ が従う. このことから, $f : G \to G'$ を $f(a_x p_x) = h(a_x p_x a_x^{-1})\, k(a_x)$ で定めることができる. この f が quandle 同型写像 であることを示す.

 f の全単射性は h と k の全単射性より従う. 後は f が quandle 準同型写像であることを示せばよい. 任意の G の元 $x = a_x p_x$, $y = a_y p_y$ について.

$$
\begin{aligned}
f(x * y) &= f(a_y p_y\, \psi((a_y p_y)^{-1} a_x p_x)) \\
&= f(a_x \cdot a_x^{-1} a_y p_y\, \psi((a_x^{-1} a_y p_y)^{-1} p_x)) \\
&= h(a_x \cdot a_x^{-1} a_y p_y\, \psi((a_x^{-1} a_y p_y)^{-1} p_x) \cdot a_x^{-1})\, k(a_x) \\
&\quad (\because a_x^{-1} a_y p_y\, \psi((a_x^{-1} a_y p_y)^{-1} p_x) = p_x * a_x^{-1} a_y p_y \in P) \\
&= h(a_y p_y\, \psi(p_y^{-1} a_y^{-1})\, \psi(a_x p_x) a_x^{-1})\, k(a_x) \\
&= h(a_y p_y a_y^{-1} \cdot a_y\, \psi(p_y^{-1} a_y^{-1})\, (a_x\, \psi(p_x^{-1} a_x^{-1}))^{-1})\, k(a_x) \\
&= h(a_y p_y a_y^{-1})\, h(a_y\, \psi(p_y^{-1} a_y^{-1}))\, h(a_x\, \psi(p_x^{-1} a_x^{-1}))^{-1}\, k(a_x) \\
&= h(a_y p_y a_y^{-1})\, h(a_y\, \psi(a_y^{-1}) \cdot \psi(a_y p_y^{-1} a_y^{-1}))\, h(\psi(a_x p_x a_x^{-1}) \cdot \psi(a_x)\, a_x^{-1})\, k(a_x) \\
&= h(a_y p_y a_y^{-1})\, h(a_y\, \psi(a_y^{-1}))\, h \circ \psi(a_y p_y^{-1} a_y^{-1} a_x p_x a_x^{-1})\, h(\psi(a_x) a_x^{-1})\, k(a_x).
\end{aligned}
$$

一方で,

$$
\begin{aligned}
f(x) * f(y) &= h(a_x p_x a_x^{-1})\, k(a_x) * h(a_y p_y a_y^{-1})\, k(a_y) \\
&= h(a_y p_y a_y^{-1})\, k(a_y)\, \psi'((h(a_y p_y a_y^{-1})\, k(a_y))^{-1}\, h(a_x p_x a_x^{-1})\, k(a_x)) \\
&= h(a_y p_y a_y^{-1})\, k(a_y)\, \psi'(k(a_y)^{-1}\, h(a_y p_y^{-1} a_y^{-1})\, h(a_x p_x a_x^{-1})\, k(a_x)) \\
&= h(a_y p_y a_y^{-1})\, k(a_y)\, \psi'(k(a_y)^{-1})\, \psi'(h(a_y p_y^{-1} a_y^{-1} a_x p_x a_x^{-1}))\, \psi'(k(a_x)) \\
&= h(a_y p_y a_y^{-1})\, k(a_y)\, \psi'(k(a_y)^{-1})\, h \circ \psi(a_y p_y^{-1} a_y^{-1} a_x p_x a_x^{-1})\, \psi'(k(a_x)). \ (\because \text{条件}\,(B))
\end{aligned}
$$

$H = h \circ \psi(a_y p_y^{-1} a_y^{-1} a_x p_x a_x^{-1})$ とおくと, 以上の計算から次が分かる.

$$
\begin{aligned}
& f(x * y) = f(x) * f(y) \\
\iff\ & h(a_y \psi(a_y^{-1})) \cdot H \cdot h(\psi(a_x) a_x^{-1})\, k(a_x) \ = \ k(a_y)\, \psi'(k(a_y)^{-1}) \cdot H \cdot \psi'(k(a_x)) \\
\iff\ & h(e * a_y) \cdot H \cdot h(e * a_x)^{-1} \ = \ e' * k(a_y) \cdot H \cdot (e' * k(a_x))^{-1}
\end{aligned}
$$

条件 (B) より, この等式は任意の G の元 $x = a_x p_x,\ y = a_y p_y$ について成立する. 以上により定理の主張は示された. □

4 主結果の応用

本節では主結果の応用を紹介する.

位数が 15 まででは、条件 $(P1)$ は全て満たされている. 条件 $(P2)$ を満たさないケースが位数が 8 の時に 1 つ, 位数 12 の時に 2 つあるが, それ以外は条件 $(P2)$ を満たすため先行研究の定理 2.7 が使える. （位数 12 の 2 つについては不変量を用いて, 異なることが示されている.）

位数 16 以上を研究するには, 条件 $(P1)$ または $(P2)$ を満たさないために先行研究の定理 2.7 では同型の判定ができない generalized Alexander quandle の組が存在する.

論文 [3] では, 位数 16 で条件 $(P2)$ をみたさない generalized Alexander quandle の組で, 定理 2.7 により同型を判別できない組が与えられている. 以下がその例である.

$Q_8 = \langle\, i,\ j,\ k \mid i^2 = j^2 = k^2 = ijk \,\rangle$ を四元数群, $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ を位数 2 の巡回群とする. このとき, $G = Q_8 \times \mathbb{Z}_2,\ G' = Q_8 \rtimes_\sigma \mathbb{Z}_2$ とする. ここで G' は 群準同型 $\sigma : \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(Q_8),\ i \mapsto \sigma_i$ ($\sigma_0 = \mathrm{id}_{Q_8},\ \sigma_1 : (i,\ j,\ k) \mapsto (i,\ -j,\ -k)$) により定まる群の半直積である. $\psi_1 \in \mathrm{Aut}(G)$ と $\psi_1' \in \mathrm{Aut}(G')$ をそれぞれ, 生成元の移し方

$$\psi_1 : G \ni ((i, 0), (j, 0), (1, 1)) \longmapsto ((j, 0), (k, 0), (1, 1)) \in G$$

$$\psi_1' : G' \ni ((i, 0),\ (j, 0),\ (1, 1)) \longmapsto ((j, 0),\ (k, 0),\ (k, 1)) \in G'$$

により定まる自己同型写像とする. これらを用いて generalized Alexander quandle を $\mathrm{Q}_1 = \mathrm{Q}(G, \psi_1),\ \mathrm{Q}_1' = \mathrm{Q}(G', \psi_1')$ と定める. このとき, $\mathrm{ord}(\psi_1) = \mathrm{ord}(\psi_1') = 3$ であり, その他の不変量も一致しているが, ともに条件 $(P2)$ を満たさないため定理 2.7 を適用できない. しかし, 今回の定理 3.1 と GAP [2] による計算で次が分かった.

応用 1 $\mathrm{Q}_1 \cong \mathrm{Q}_1'$

さらに位数 16 においては, 上と同じ群由来で, 条件 $(P2)$ を満たさず定理 2.7 により同型を判別できない組がもう一組だけ存在する. それは次で与えられる. $\psi_2 \in \mathrm{Aut}(G)$ と $\psi_2' \in \mathrm{Aut}(G')$ をそれぞれ, 生成元の移し方

$$\psi_2 : G \ni ((i,0),(j,0),(1,1)) \longmapsto ((j,0),(k,0),(-1,1)) \in G$$

$$\psi_2' : G' \ni ((i,0),(j,0),(1,1)) \longmapsto ((j,0),(k,0),(-k,1)) \in G'$$

により定まる自己同型写像とする. $\mathrm{Q}_2 = \mathrm{Q}(G,\psi_2)$, $\mathrm{Q}_2' = \mathrm{Q}(G',\psi_2')$ とおく. これらについても次が分かった.

応用 2 $\mathrm{Q}_2 \cong \mathrm{Q}_2'$

応用 1, 2 により位数 16 の群由来の generalized Alexander quandle について, その同型類がすべて決定される.

位数 16 以降にも, 定理 2.7 では同型を判別できない組が位数 24 や位数 32 で出てくる. 今回の主結果を用いることでそれらについても同型を判別することが可能である. 次は位数 63 までの, 各位数 n における generalized Alexander quandle の同型類の個数 $|Q_{\mathrm{GAQ}}|$ のリストである.

応用 3 63 以下の自然数 n に対して, $|Q_{\mathrm{GAQ}}(n)|$ の表は次で与えられる.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\|Q_{\mathrm{GAQ}}(n)\|$	**1**	**1**	**2**	**3**	**4**	**3**	**6**	**9**	**11**	**5**	**10**	**11**	**12**	**7**	**8**
n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\|Q_{\mathrm{GAQ}}(n)\|$	**29**	**16**	**17**	**18**	**15**	**13**	**11**	**22**	**32**	**39**	**13**	**51**	**20**	**28**	**15**
n	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
$\|Q_{\mathrm{GAQ}}(n)\|$	**30**	**87**	**20**	**17**	**24**	**64**	**36**	**19**	**25**	**45**	**40**	**23**	**42**	**32**	**44**
n	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
$\|Q_{\mathrm{GAQ}}(n)\|$	**23**	**46**	**114**	**83**	**49**	**32**	**39**	**52**	**87**	**41**	**66**	**37**	**29**	**58**	**60**
n	61	62	63												
$\|Q_{\mathrm{GAQ}}(n)\|$	**60**	**31**	**69**												

表 2. List of $|Q_{\mathrm{GAQ}}(n)|$

謝辞

本研究集会での講演の機会を与えてくださった世話人の先生方に心より感謝申し上げます. 講演を聞いてくださった方々にもこの場をお借りしてお礼申し上げます.

参考文献

[1] N. Andruskiewitsch, M. Graña, From racks to pointed Hopf algebras, Adv. Math. 178 (2003), 177-243.

[2] GAP - Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.12.2 (2022), http://www.gap-system.org.

[3] A. Higashitani and H. Kurihara, *Generalized Alexander quandles of finite groups and their characterizations*, arXiv:2210.16763 (2022).

[4] A. Higashitani and H. Kurihara, *Homogeneous quandles arising from automorphisms of symmetric groups*, arXiv:2005.12057 (2020).

[5] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra 23 (1982), no. 1, 37–65.

[6] S. V. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, Mat. Sb. 161 (1982), no. 1, 78–88.

[7] S. Nelson, *Classification of finite Alexander quandles*, Proceedings of the Spring Topology and Dynamical Systems Conference. (2003), 245–258 MR 2048935.

[8] L. Vendramin, *Rig, a GAP package for racks, quandles and Nichols algebras*. Available at https://github.com/gap-packages/rig/