結び目 n-カンドルの 2 次カンドルホモロジー群

谷口 雄大 (大阪大学大学院理学研究科)*1
田中 心 (東京学芸大学教育学部)*2

概 要

結び目カンドルは結び目の非常に強力な不変量である一方で不変量としては少々扱いづらい. そこで結び目カンドルの商をとった結び目 n-カンドルと呼ばれる不変量を扱う場合が多い. 今回全ての結び目に対して結び目 n-カンドルの 2 次のカンドルホモロジー群を決定することが出来たため, これについて報告する. 特にいくつかの結び目を結び目 n-カンドルの 2 次のホモロジー群が特徴づける事もわかった.

1. 導入

カンドル (quandle) [9,10] とは集合とある条件を満たす 2 項演算の組のことである. カンドルは結び目理論と相性が良いことが知られており, カンドルを用いて現在までに様々な結び目の不変量が定義されている. その中でも結び目カンドルと呼ばれる不変量は非常に強力な不変量であり, 結び目をほぼ完全に分類できることが知られている. 一方で結び目カンドルは複雑であるので, 結び目カンドルを用いて結び目を区別するというのは難しい. そこでしばしば結び目カンドルの商をとった結び目 n-カンドルと呼ばれるものを不変量を考えることがある. 結び目 n-カンドルは不変量として結び目カンドルよりは弱い不変量になっているが, 不変量としては扱いやすい.

表題にあるカンドルホモロジー群は [2] で導入された概念である. 与えられたカンドルのカンドルホモロジー群を決定するというのは重要な問題であるが, カンドルホモロジー群の定義から直接計算するのは非常に難しい. Eisermann [5,6] はカンドルの被覆の理論を導入し, それらを用いることで非自明な有向結び目 K の結び目カンドルの 2 次カンドルホモロジー群 $H_2^Q(Q(K))$ が $\mathbb{Z}$ と同型であることを示している [5]. 自明な結び目 0_1 に対して $H_2^Q(Q(0_1))$ は自明なので, Eisermann の結果から「結び目カンドルの 2 次カンドルホモロジー群 $H_2^Q(Q(K))$ は自明な結び目 0_1 を特徴づける」ということが従う.

今回の我々の主結果は結び目 n-カンドル $Q_n(K)$ の 2 次カンドルホモロジー群 $H_2^Q(Q_n(K))$ を決定したことである. 我々の定理の帰結として次が得られる.

定理 3.6. (1) 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>2}$ に対して $H_2^Q(Q_n(K))$ は 0_1 を特徴づける, すなわち $H_2^Q(Q_n(K)) \cong H_2^Q(Q_n(0_1)) = 0$ ならば $K = 0_1$ が成り立つ.

(2) $n = 3, 4, 5$ に対して $H_2^Q(Q_n(K))$ は 3_1 を特徴づける, すなわち $H_2^Q(Q_n(K)) \cong H_2^Q(Q_n(3_1))$ ならば $K = 3_1$ が成り立つ.

(3) $H_2^Q(Q_3(K))$ は 5_1 を特徴づける, すなわち $H_2^Q(Q_3(K)) \cong H_2^Q(Q_3(5_1)) = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ならば $K = 5_1$ が成り立つ.

定理の (1) は Eisermann の結果の類似が結び目 n-カンドルでも成り立つことを主張している. さらに (2), (3) では結び目 n-カンドルのカンドルホモロジー群は 3_1 と 5_1

本研究は科研費 (課題番号:17K05242, 21K03220, 21J21482) の助成を受けたものである。
*1 e-mail: yuta.taniguchi.math@gmail.com
*2 e-mail: kotanaka@u-gakugei.ac.jp

の特徴づけるという事も主張している．前述した通り結び目 n-カンドル $Q_n(K)$ は結び目カンドル $Q(K)$ よりは弱い不変量である．よって直感的には結び目 n-カンドルのホモロジー群 $H_2^Q(Q_n(K))$ は結び目カンドルのホモロジー群 $H_2^Q(Q(K))$ より弱い不変量になるように思う．しかしながら我々の結果から結び目 n-カンドルのホモロジー群 $H_2^Q(Q_n(K))$ は結び目カンドルのホモロジー群 $H_2^Q(Q(K))$ よりも不変量として強くなるということがわかった.

2. 定義

2.1. 結び目カンドルと結び目 n-カンドル

空でない集合 X 上の 2 項演算 $*$ が以下の条件を満たすとき組 $X=(X,*)$ を **カンドル** [9,10] と呼ぶ.

- 任意の $x \in X$ に対して $x * x = x$ が成り立つ.
- 任意の $y \in X$ に対して写像 $S_y : X \to X; x \mapsto x * y$ は全単射である.
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ が成り立つ.

任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $S_y^n(x)$ を $x *^n y$ で表す．3 つ目の公理から各 $x \in X$ に対して S_x はカンドル自己同型写像であることがわかる．集合 $\{S_x \mid x \in X\}$ で生成されるカンドル自己同型群の部分群をカンドルの**内部自己同型群**と呼び, $\mathrm{Inn}(X)$ と表すことにする．カンドル X には内部自己同型群 $\mathrm{Inn}(X)$ が作用し, この作用が推移的であるときにカンドル X は**連結**であるという.

K を $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ 内の有向結び目とし, K の外部 $S^3 \backslash \mathrm{int} N(K)$ を $E(K)$ と書く．ここで $Q(K)$ を始点が $\partial E(K)$ の点で, 終点が ∞ であるような $E(K)$ 内の道のホモトピー類全体の集合とする．このとき $Q(K)$ に 2 項演算 $*$ を次のように定める: $\alpha * \beta := \alpha \cdot \beta^{-1} \cdot m_{\beta(0)} \cdot \beta$, ここで $m_{\beta(0)}$ は $\beta(0)$ を基点とし正の方向に 1 周するメリディアンである．このとき組 $Q(K) = (Q(K), *)$ はカンドルであり, このカンドルを**結び目カンドル**と呼ぶ. 結び目カンドルは有向結び目の非常に強力な不変量であり, S^3 内の有向結び目をほぼ完全に分類出来る．一方, 結び目カンドル $Q(K)$ は非常に複雑であり不変量としては扱いづらい．そこで次のように結び目カンドルの商をとった**結び目 n-カンドル**を考える場合が多い.

定義 2.1. ([9,15]) K を有向結び目とし, n を 2 以上の整数とする．ここで $x \sim x *^n y$ で生成される $Q(K)$ 上の同値関係を $\sim_n$ と表す．このとき $\sim_n$ による商集合 $Q(K)/\sim_n$ は $Q(K)$ から誘導された演算によりカンドルになる．このカンドルを**結び目 n-カンドル**と呼び, $Q_n(K)$ で表す.

注意 2.2. いくつかの論文 [3,7,15] では結び目 n-カンドル $Q_n(K)$ を単に K の **n-カンドル**と呼んでいる．一方で Joyce [9] は任意の $x, y \in X$ に対して $x *^n y = x$ を満たすカンドル X を n-カンドルと呼んでいる．混乱を防ぐためにも本稿では結び目 n-カンドルという用語を使うことにする.

結び目 n-カンドルも結び目の不変量であるが, $Q_2(4_1) \cong Q_2(5_1)$ が成り立つなど不変量としては弱いものになっている．一方でいくつかの場合には有限位数になるなど結び目カンドル自体よりは扱いやすい [7].

結び目カンドルを用いた不変量として**彩色数**と呼ばれる不変量を考えることが多い．これは結び目カンドル $Q(K)$ から有限カンドル X へのカンドル準同型の個数 $|\mathrm{Hom}(Q(K), X)|$ のことであるが, この値は結び目 n-カンドルから X へのカンドル準同型の個数 $|\mathrm{Hom}(Q_n(K), X)|$ と一致する, ここで n は X から定まる 2 以上の整数である．すなわち彩色数は本質的には結び目 n-カンドルの準同型を考えていることになる．

2.2. カンドルの被覆と拡大

ここではカンドルの被覆と拡大について簡単に復習する．詳細については [5,6] を参照されたい．

定義 2.3. ([5,6]) $X, \tilde{X}$ を連結なカンドル, Λ を群とする．また Λ は $\tilde{X}$ に左から作用しているとする．

(1) 全射カンドル準同型 $p : \tilde{X} \to X$ が以下の条件を満たすとき, p を**被覆**と呼ぶ:

- $p(\tilde{y}) = p(\tilde{z})$ ならば任意の $\tilde{x} \in \tilde{X}$ に対して $\tilde{x} * \tilde{y} = \tilde{x} * \tilde{z}$ が成り立つ．

(2) 次を満たす全射カンドル準同型 $p : \tilde{X} \to X$ が存在するとき $\tilde{X}$ は (群 Λ による) X の**拡大**であるという:

- 任意の $\lambda \in \Lambda$ と $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$ に対して $(\lambda \cdot \tilde{x}) * \tilde{y} = \lambda \cdot (\tilde{x} * \tilde{y})$ かつ $\tilde{x} * (\lambda \cdot \tilde{y}) = \tilde{x} * \tilde{y}$ が成り立つ．

- 任意の $x \in X$ に対して, $p^{-1}(x)$ は Λ の作用で閉じており, その作用は自由かつ推移的である．

(3) 被覆 $p : \tilde{X} \to X$ が以下の条件を満たすとき p を**普遍被覆**と呼ぶ:

- 任意の被覆 $\bar{p} : \bar{X} \to X$ に対してあるカンドル準同型 $\phi : \tilde{X} \to \bar{X}$ が存在し, $p = \bar{p} \circ \phi$ が成り立つ．

被覆 $p : \tilde{X} \to X$ に対して $\mathrm{Aut}(p) := \{\phi : \tilde{X} \to \tilde{X} : \text{カンドル同型} \mid p = p \circ \phi\}$ を p の**被覆変換群**と呼ぶ．

定理 2.4. ([6]) $X, \tilde{X}$ を連結なカンドルとする．$p : \tilde{X} \to X$ が普遍被覆ならば, $\tilde{X}$ は $\mathrm{Aut}(p)$ による X の拡大である．またこのとき X の 2 次の**カンドルホモロジー群** [2] $H_2^Q(X)$ は $\mathrm{Aut}(p)$ の可換化と同型である．

有向結び目 K に対して $\hat{K}$ で K から得られる **long knot** とする．Eisermann は long knot の結び目カンドルを考察することにより以下の定理を示した．

定理 2.5. ([5,6]) $Q(\hat{K})$ から $Q(K)$ への普遍被覆 $p : Q(\hat{K}) \to Q(K)$ が存在する．また被覆変換群 $\mathrm{Aut}(p)$ は標準的ロンジチュード $l_K \in G(K)$ が生成する巡回群と同型である．

非自明な有向結び目 K の標準的ロンジチュード l_K はねじれ元でないので, 定理 2.5 から次が従う．

定理 2.6. ([5]) 非自明な有向結び目 K に対して $H_2^Q(Q(K)) \cong \mathbb{Z}$ が成り立つ．

自明な結び目 0_1 に対して, $H_2^Q(Q(0_1))$ が自明群であるということは直ぐにわかる．よって定理 2.6 から「結び目カンドルの 2 次カンドルホモロジー群 $H_2^Q(Q(K))$ は自明な結び目を特徴づける」ということが従う．

3. 結び目 n-カンドルの2次カンドルホモロジー群

3.1. 主定理

我々の主結果は結び目 n-カンドルの 2 次のカンドルホモロジー群をすべて決定したことである.

定理 3.1.

$$H_2^Q(Q_2(K)) \cong \begin{cases} 0 & (K \fallingdotseq 0_1), \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad (K \fallingdotseq M(1/2,*/3,*/3)), \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & (K \fallingdotseq M(1/2,*/3,*/5)), \quad \mathbb{Z} \quad (K : \text{otherwise}), \end{cases}$$

ここで $\fallingdotseq$ は 2 橋結び目の連結和を無視して等しいことを意味し, $M(1/2,*/3,*/3)$ と $M(1/2,*/3,*/5)$ は Montesinous 結び目を表す.

定理 3.2. $H_2^Q(Q_3(K)) \cong \begin{cases} 0 & (K = 0_1), \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad (K = 3_1), \\ \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & (K = 5_1), \quad \mathbb{Z} \quad (K : \text{otherwise}). \end{cases}$

定理 3.3. $H_2^Q(Q_4(K)) \cong \begin{cases} 0 & (K = 0_1), \quad \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \quad (K = 3_1), \\ \mathbb{Z} & (K : \text{otherwise}). \end{cases}$

定理 3.4. $H_2^Q(Q_5(K)) \cong \begin{cases} 0 & (K = 0_1), \quad \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \quad (K = 3_1), \\ \mathbb{Z} & (K : \text{otherwise}). \end{cases}$

定理 3.5. 任意の 5 より大きな整数 n に対して, $H_2^Q(Q_n(K)) \cong \begin{cases} 0 & (K = 0_1), \\ \mathbb{Z} & (K : \text{otherwise}). \end{cases}$

Section 2 で述べたように Eisermann は結び目カンドルのカンドルホモロジー群が 0_1 を特徴づけることを証明した. 我々の計算結果から結び目 n-カンドルのカンドルホモロジー群は自明な結び目 0_1 と非自明な結び目 $3_1, 5_1$ を特徴づけるということがわかる.

定理 3.6. (1) 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>2}$ に対して $H_2^Q(Q_n(K))$ は 0_1 を特徴づける, すなわち $H_2^Q(Q_n(K)) \cong H_2^Q(Q_n(0_1)) = 0$ ならば $K = 0_1$ が成り立つ.
(2) $n = 3, 4, 5$ に対して $H_2^Q(Q_n(K))$ は 3_1 を特徴づける, すなわち $H_2^Q(Q_n(K)) \cong H_2^Q(Q_n(3_1))$ ならば $K = 3_1$ が成り立つ.
(3) $H_2^Q(Q_3(K))$ は 5_1 を特徴づける, すなわち $H_2^Q(Q_3(K)) \cong H_2^Q(Q_3(5_1)) = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ならば $K = 5_1$ が成り立つ.

3.2. 主定理の証明の概略

ここでは主定理の証明の概要を述べる. 詳細は [14] を参照されたい. K を有向結び目, n を 2 以上の整数とする. また K で分岐する S^3 の n 重巡回分岐被覆 M_K^n の分岐集合を $\widetilde{K}$ と書き, $\widetilde{K}$ が表す基本群 $\pi_1(M_K^n)$ の元を l_K と書く. 更に l_K が生成する $\pi_1(M_K^n)$ の部分群を A_K^n と表す. 我々は結び目 n-カンドルの構造を考察することによって, **n-ツイストスパン結び目** $\tau^n K$ の結び目カンドル $Q(\tau^n K)$ から $Q_n(K)$ へのカンドル準同型 $p : Q(\tau^n K) \to Q_n(K)$ を構成した. またそのカンドル準同型に対して次の定理を得た:

定理 3.7. $p : Q(\tau^n K) \to Q_n(K)$ は普遍被覆である. またその被覆変換群 $\mathrm{Aut}(p)$ は A_K^n と同型である.

注意 3.8. 任意の結び目 K に対して $Q(\hat{K})$ と $Q(\tau^0 K)$ はカンドルとして同型である. また定義から "結び目 0-カンドル" $Q_0(K)$ は結び目カンドルそのものと考えることができる. よって "形式的" に $n=0$ とすれば定理 3.7 から定理 2.5 が復元される. しかしながら我々の定理 3.7 の証明が定理 2.5 の別証明を与えているというわけでないということに注意されたい.

注意 3.9. 我々の結果から, $Q(\tau^n K)$ は巡回群 A_K^n による $Q_n(K)$ の拡大ということがわかる. Inoue [8] は $Q(\tau^n 3_1)$ はある巡回群による **Schläfli カンドル** X_n の拡大であることを示している. Schläfli カンドル X_n は 3_1 の結び目 n-カンドル $Q_n(3_1)$ と同型であるので, 我々の結果は [8] の結果の拡張と見做すことができる.

定理 2.4 より普遍被覆の被覆変換群を可換化した群と 2 次カンドルホモロジー群が同型であったので, $H_2^Q(Q_n(K))$ は A_K^n と同型である. よって l_K の位数を求めればよい.

3.3. K が素な結び目の場合

まず素な結び目 K に対して l_K を考える. このとき同変球面定理 [11] より M_K^n は既約であることに注意しよう. ([12] も参照せよ.)

<u>$\pi_1(M_K^n)$ が無限群の場合</u> このとき M_K^n の普遍被覆は $\mathbb{R}^3$ になることが分かる. よって $\pi_1(M_K^n)$ はねじれ元を持たない. ここで l_K が単位元と仮定する. このとき仮定から普遍被覆 $p:\mathbb{R}^3 \to M_K^n$ に対して $p^{-1}(K)$ の各連結成分は S^1 と同相になる. $p^{-1}(K)$ の連結成分を 1 つ固定すると, それを固定点集合として含む被覆変換 $\varphi: M_K^n \to M_K^n$ のリフト $\tilde{\varphi}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ がとれる. しかしこれは Smith 理論に矛盾する. ([1, Theorem 5.2 in Chapter III] を参照せよ.) したがって l_K は単位元でないということが分かる.

<u>$\pi_1(M_K^n)$ が有限群の場合</u> このとき M_K^n の普遍被覆は S^3 となる. Dunbar による spherical orbifold の分類 [4] から, K と n に対して以下のいずれかが成り立つ:

(1) $n=2$ かつ K: 2 橋結び目.
(2) $n=2$ かつ K: Montesinous 結び目 $M(1/2,*/3,*/3)$.
(3) $n=2$ かつ K: Montesinous 結び目 $M(1/2,*/3,*/5)$.
(4) $n=3,4,5$ かつ $K=3_1$.
(5) $n=3$ かつ $K=5_1$.

(4) の場合は [8] で l_K の位数が求められている. (注意 3.9 も参照せよ.) (5) の場合は [3] の結果を用いることで l_K の位数を求めることができる. (1) ~ (3) の場合を考えよう. このとき普遍被覆 $p:S^3 \to M_K^2$ による $\widetilde{K}$ の逆像 $p^{-1}(\widetilde{K})$ は S^3 内の絡み目になっており, この絡み目を L と表すことにする. このとき被覆 p の次数を考察することで (l_K の位数) $= |\pi_1(M_K^2)|/$(L の成分数) が成り立つことがわかる. [13] によって L の成分数は決定されているので, その結果を用いることにより l_K の位数を求めることができる.

注意 3.10. 素な結び目 K に対して $H_2^Q(Q_n(K))=0$ ならば $n=2$ かつ K が 2 橋結び目ということが従う.

3.4. K が合成結び目の場合

結び目 K_1, K_2 の合成結び目 $K := K_1\sharp K_2$ を考える. このとき任意の $n\in\mathbb{Z}_{>1}$ に対して $(M_K^n,\widetilde{K}) \cong (M_{K_1}^n,\widetilde{K_1})\sharp(M_{K_2}^n,\widetilde{K_2})$ が成り立つことがわかる. 従って $l_K \in \pi_1(M_K^n)$ に対して $l_K = l_{K_1}\cdot l_{K_2}$ が成立する. 特に l_{K_1}, l_{K_2} が非自明ならば l_K はねじれ元でない

ということがわかる．注意 3.10 から素な結び目 K に対して l_K が自明元になるのは $n=2$ かつ K が 2 橋結び目の場合に限るので以下の命題が成り立つことがわかる．

命題 3.11. K を合成結び目とする．

(1) K が K' と 2 橋結び目の連結和を無視して等しいならば $H_2^Q(Q_2(K)) \cong H_2^Q(Q_2(K'))$ が成り立つ．

(2) n を 2 より大きな整数とする．このとき $H_2^Q(Q_n(K)) \cong \mathbb{Z}$ が成り立つ．

謝辞

本研究集会での講演の機会を与えてくださった世話人の大山淑之先生, 新國亮先生に心よりお礼申し上げます.

参考文献

[1] G. E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, New York-London, 1972. MR413144

[2] J S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, and M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 10, 3947–3989.

[3] A. S. Crans, B. Mellor, P. D. Shanahan, and J. Hoste, *Finite n-quandles of torus and two-bridge links*, J. Knot Theory Ramifications **28** (2019), no. 03, 1950028.

[4] W. D. Dunbar, *Geometric orbifolds*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid **1** (1988), no. 1-3, 67–99. MR977042

[5] M. Eisermann, *Homological characterization of the unknot*, J. Pure Appl. Algebra **177** (2003), no. 2, 131 –157.

[6] ______, *Quandle coverings and their Galois correspondence*, Fund. Math. **225** (2014), no. 1, 103–168. MR3205568

[7] J. Hoste and P. D. Shanahan, *Links with finite n-quandles*, Algebr. Geom. Topol. **17** (2017), no. 5, 2807–2823.

[8] A. Inoue, *The knot quandle of the twist-spun trefoil is a central extension of a Schläfli quandle*, Osaka J. math. **60** (2023), no. 3, 597–611.

[9] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23** (1982), no. 1, 37–65.

[10] S. V. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, Mat. Sb. **161** (1982), no. 1, 78–88.

[11] W. H. Meeks III and S. T. Yau, *Topology of three-dimensional manifolds and the embedding problems in minimal surface theory*, Ann. of Math. (2) **112** (1980), no. 3, 441–484. MR595203

[12] M. Sakuma, *On regular coverings of links*, Math. Ann. **260** (1982), no. 3, 303–315. MR669298

[13] ______, *The geometries of spherical Montesinos links*, Kobe J. Math. **7** (1990), no. 2, 167–190. MR1096689

[14] K. Tanaka and Y. Taniguchi, *The second quandle homology group of the knot n-quandle*, preprint. aveilable at arXiv:2312.13679.

[15] S. K. Winker, *Quandles, knot invariants, and the n-fold branched cover*, Ph.D. Thesis, 1984.