

## 2 橋絡み目とプレッツェル絡み目の カンドル彩色クイバー

結び目の数理 VI (東京女子大学)

石原 双葉 (広島大学先進理工系科学研究科)\*

### 概 要

絡み目の基本カンドルから有限カンドルへのカンドル準同型写像をカンドル彩色といい、その個数は絡み目の不変量になる。絡み目のカンドル彩色の全貌は、カンドル彩色クイバー ([4]) と呼ばれる有向多重グラフを用いて表すことができる。本稿では、2 橋絡み目とプレッツェル絡み目の、2 面体カンドルによるカンドル彩色クイバーについて報告する。

## 1 カンドル

### 1.1 カンドルの定義

**Definition 1.1.**  $X$  を 2 項演算  $\triangleright$  を持つ集合とする。  $\triangleright$  が次の 3 つの条件を満たすとき、  $(X, \triangleright)$  をカンドルという。

1. 任意の  $x \in X$  に対し、  $x \triangleright x = x$  が成り立つ、
2. 任意の  $y, z \in X$  に対し、  $z = x \triangleright y$  となる  $x \in X$  がただ一つ存在する、
3. 任意の  $x, y, z \in X$  に対し、  $(x \triangleright y) \triangleright z = (x \triangleright z) \triangleright (y \triangleright z)$  が成り立つ。

**Example 1.2.**  $X = \mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  とし、演算を任意の  $x, y \in \mathbb{Z}_n$  に対して  $x \triangleright y := 2y - x \pmod n$  と定義すれば、  $(X, \triangleright)$  はカンドルである。これを位数  $n$  の 2 面体カンドルといい、  $R_n$  とかく。

**Definition 1.3.**  $(X, \triangleright), (Y, \triangleright')$  をカンドルとする。写像  $f: X \rightarrow Y$  が、

$$\text{任意の } x_1, x_2 \in X \text{ に対して、 } f(x_1 \triangleright x_2) = f(x_1) \triangleright' f(x_2)$$

を満たすとき、  $f$  はカンドル準同型写像であるといい、  $X$  から  $Y$  へのカンドル準同型写像全体の集合を  $\text{Hom}(X, Y)$  とかく。特に  $X$  から  $X$  へのカンドル準同型写像をカンドル自己準同型写像といい、その集合を  $\text{End}(X)$  とかく。また、全単射なカンドル準同型写像をカンドル同型写像という。  $X$  から  $Y$  へのカンドル同型写像が存在するとき、  $X$  と  $Y$  は同型であるという。

**Definition 1.4.** 有限集合上のカンドルを有限カンドルといい、有限カンドルの元の個数をそのカンドルの位数という。

---

\* e-mail: m224962@hiroshima-u.ac.jp

以下、カンドルと言えは全て有限カンドルであるとする。

### 1.2 基本カンドルとカンドル彩色

**Theorem/Definition 1.5.** 有向結び目 (絡み目)  $K$  のトーラス近傍  $N(K)$  とその補空間  $\mathbb{R}^3 \setminus N(K)$  内の基点  $*$  に対し,  $*$  から  $N(K)$  の境界上の点までの道のホモトピー類を元とする集合を  $X_K$  とする. ここで,  $N(K)$  の境界上の全ての点  $p$  について,  $K$  に沿った右ねじの向きで1回まわる円がイソトピーを法としてただ一つ存在する. これを  $p$  での**メリディアン**といい,  $m_p$  とかく. このとき,  $X_K$  上に以下の図1のように2項演算を  $x \triangleright y := ym_y^{-1}y^{-1}x$  で定めると,  $(X_K, \triangleright)$  はカンドルになる. これを, 結び目 (絡み目)  $K$  の**基本カンドル (結び目 (絡み目) カンドル)** といい,  $Q(K)$  とかく.

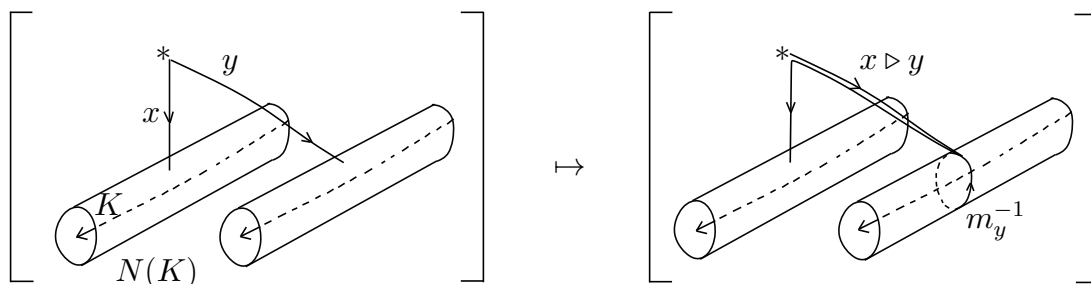


図1 基本カンドルの演算.

**Theorem 1.6** ([1]). 基本カンドルは (鏡像を区別しない) 結び目 (絡み目) 不変量である.

結び目 (絡み目) カンドルの表示を図式から求めることができる. 有向結び目 (絡み目)  $K$  の図式を  $D$  とし,  $D$  のアーク全体の集合を  $\text{Arc}(D) := \{a_1, \dots, a_n\}$  とする.  $\text{Arc}(D)$  の元  $a_i$  に文字  $x_i$  を対応させ,  $x_1, \dots, x_n$  により生成される自由カンドルを考える. 図2のような, 図式  $D$  の各交点に対し, 関係式  $r_i$  を  $x_k = x_i \triangleright x_j$  と定めると, 表示

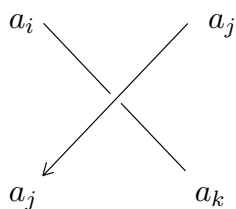


図2 各交点.

$\langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_n \rangle$  が得られる. このカンドルを図式  $D$  から定まるカンドルといい,  $Q(D)$  と表す. また, 関係式  $r_i$  を**交点関係式**という. ここで, 表示における  $x_i, x_k, x_j$  はそれぞれ, 結び目 (絡み目) 上にない基点  $*$  を紙面の手前にとり, 基点から結び目 (絡み

目) のトーラス近傍の境界までを進む道のホモトピー類に対応する.

**Theorem 1.7** ([2]).  $K$  の結び目 (絡み目) カンドル  $\mathcal{Q}(K)$  と  $K$  の図式  $D$  から定まるカンドル  $\mathcal{Q}(D)$  は同型である.

したがってここからは,  $\mathcal{Q}(D) = \mathcal{Q}(K)$  とかく.

**Definition 1.8.** 有向結び目 (絡み目)  $K$  の基本カンドル  $\mathcal{Q}(K)$  から有限カンドル  $X$  へのカンドル準同型写像を**表現**という.

基本カンドルは結び目 (絡み目) の強力な不変量であるが, このままでは扱いづらいので, 有限カンドルへの表現を考える. そこで, 基本カンドルの表現を  $K$  の図式  $D$  の言葉で表すことを考える.

**Definition 1.9.** 結び目 (絡み目)  $K$  の図式  $D$  のアーク全体の集合を  $\text{Arc}(D)$  とする. 図式  $D$  のアークに有限カンドル  $X$  の元を対応させる写像

$$\mathcal{C} : \text{Arc}(D) \rightarrow X$$

が  $x, y \in X$  に対し, 図式  $D$  の各交点で図3の条件を満たすとき,  $\mathcal{C}$  を結び目 (絡み目) 図式  $D$  の  $X$  彩色 ( $X$ -coloring) といい,  $D$  の  $X$  彩色全体の集合を  $\text{Col}_X(D)$  とかく.

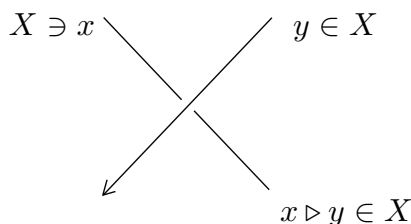


図3

カンドル準同型  $f : \mathcal{Q}(K) \rightarrow X$  が与えられたとき,  $D$  のアークに対して自然に定まる  $\mathcal{Q}(K)$  の元を対応させる写像

$$\iota : \text{Arc}(D) \rightarrow \mathcal{Q}(K)$$

を  $f$  に合成することにより, 自然な写像

$$\text{Hom}(\mathcal{Q}(K), X) \rightarrow \text{Col}_X(D) \quad (1)$$

が定まる.

逆に,  $D$  の  $X$  彩色があったとき,  $\mathcal{Q}(K)$  の生成元から  $X$  への写像が一意に定まるが,  $X$  彩色の定義よりこの対応は  $\mathcal{Q}(K)$  の関係式を満たすので, この写像はカンドル準同型になる. これにより,  $\text{Col}_X(D)$  から  $\text{Hom}(\mathcal{Q}(K), X)$  への写像が定まり, この写像

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Arc}(D) & \xrightarrow{c} & X \\
 \downarrow \iota & \circlearrowleft & \nearrow f \\
 \mathcal{Q}(K) & & 
 \end{array}$$

は先に定めた  $\text{Hom}(\mathcal{Q}(K), X)$  から  $\text{Col}_X(D)$  への写像の逆写像になる．よって，式 (1) は全単射になる．したがって， $\text{Hom}(\mathcal{Q}(K), X)$  と  $\text{Col}(D)$  を同一視することができる．

**Definition 1.10.** 結び目（絡み目） $K$  の基本カンドル  $\mathcal{Q}(K)$  の  $X$  への表現の個数（すなわち  $K$  の図式  $D$  の  $X$  彩色の個数） $|\text{Col}_X(K)|$  を  $K$  の  $X$  彩色数という．

**Remark 1.11.**  $X$  彩色数は結び目（絡み目）不変量である．

したがってこの先は，結び目（絡み目） $K$  の図式  $D$  の  $X$  彩色数  $|\text{Col}_X(D)|$  を  $|\text{Col}_X(K)|$  と書く．

## 2 カンドル彩色クイバーの定義と先行研究

### 2.1 カンドル彩色クイバーの定義

**Definition 2.1.**  $V$  を有限集合とし，重み関数  $c$  を写像  $c: V \times V \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$  とする．このとき， $(V, c)$  を有向多重グラフという．

**Definition 2.2** (Cho–Nelson [4]).  $X$  を有限カンドルとし， $K$  を有向結び目（絡み目）とする．また， $S \subset \text{End}(X)$  とする．このとき，次の集合  $V$  と重み関数  $c: V \times V \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$  により定まる有向多重グラフ  $(V, c)$  を  $K$  の  $X$  彩色クイバーといい， $\mathcal{Q}_X^S(K)$  とかく．

- $V = \text{Col}_X(K)$ ,
- 任意の  $(v_i, v_j) \in V \times V$  に対して， $c(v_i, v_j) = |\{f \in S \mid v_j = f \circ v_i\}|$  である．

特に， $S = \text{End}(X)$  のとき， $(V, c)$  を  $K$  の  $X$  彩色フルクイバーといい， $\mathcal{Q}_X(K)$  とかく．

この先は，カンドル彩色フルクイバーのみを考え，カンドル彩色フルクイバーを単にカンドル彩色クイバーと言うことにする．

**Remark 2.3.**  $X$  彩色クイバーは結び目（絡み目）不変量である．

**Example 2.4.** Hopf 絡み目の  $R_2$  彩色クイバーを考える．写像  $f_1, f_2, f_3: R_2 \rightarrow R_2$  をそれぞれ， $f_1(x) = 0$ ， $f_2(x) = 1$ ， $f_3(x) = x + 1$  ( $x \in R_2$ ) により定めると， $\text{End}(X) = \{\text{id}_X, f_1, f_2, f_3\}$  であるので，4通りある  $L$  の  $R_2$  彩色を全ての  $R_2$  のカンドル自己準同型写像で関連づけると，図4のようにかける．したがって， $L$  の  $R_2$  彩色フルクイバーは図5に示す有向多重グラフになる．

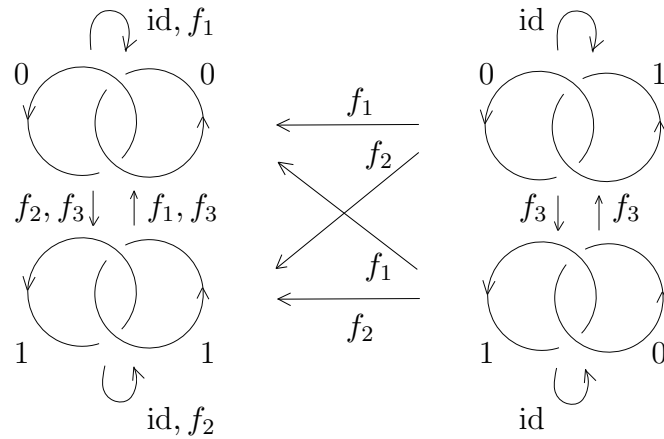


図 4

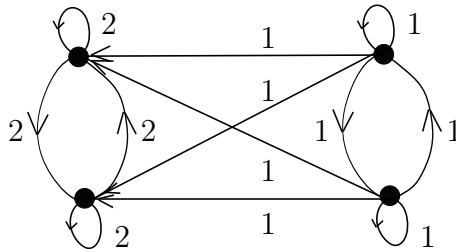


図 5 Hopf 絡み目の  $R_2$  によるカンドル彩色クイバー.

**Definition 2.5.**  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  とする. 集合  $V$  を  $V := \{v_1, \dots, v_n\}$  とし, 重み関数  $\hat{k} : V \times V \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$  を任意の  $(v_i, v_j) \in V \times V$  に対し  $\hat{k}(v_i, v_j) = k$  とする. このとき, 有向多重グラフ  $(V, \hat{k})$  を **完全有向グラフ** といい,  $(\vec{\mathcal{K}}_n, \hat{k})$  とかく.

**Definition 2.6.**  $d \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) とし,  $c := \gcd(d, n)$  とする. このとき, 次の集合  $V$  と重み関数  $c' : V \times V \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$  により定まる有向多重グラフ  $(V, c')$  を  $\Gamma_{d,n}$  とかく.

- $V = \{(i, i + \frac{kn}{c}) := v_{i,k} \mid i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, k \in \{1, \dots, c-1\}\}$ ,
- 任意の  $(v_{i,k}, v_{j,l}) \in V \times V$  に対して,

$$c'(v_{i,k}, v_{j,l}) = \begin{cases} 0 & \gcd(k, c) \nmid \gcd(l, c) \text{ のとき} \\ \frac{n}{c} \cdot \gcd(k, c) & \gcd(k, c) \mid \gcd(l, c) \text{ のとき} \end{cases}$$

である.

**Example 2.7.**  $\Gamma_{3,6}$  は次の図のようになる. ただし,  $\bullet \xrightarrow{2} \bullet$  は  $\bullet \begin{matrix} \xrightarrow{2} \\ \xleftarrow{2} \end{matrix} \bullet$  を表し,  $\bullet \xrightarrow{2} \bullet$  は  $\bullet \xrightarrow{2} \bullet$  を表すものとする.

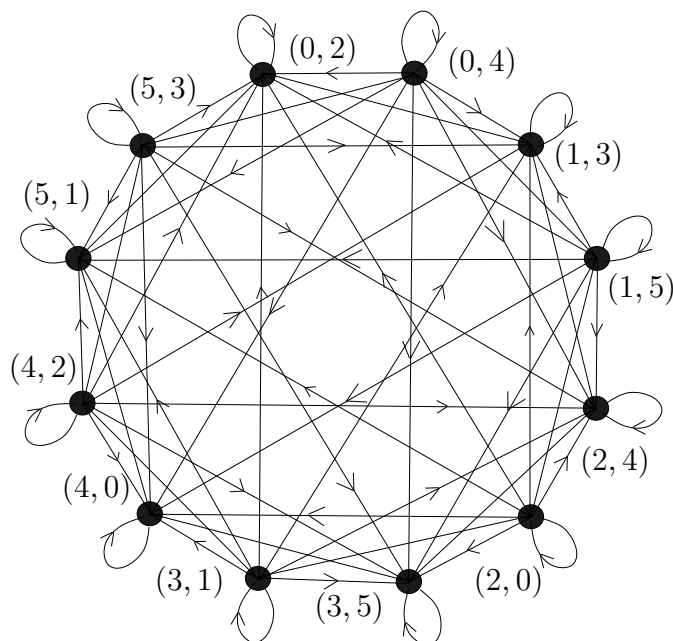


図 6

**Definition 2.8.**  $G_1 = (V_1, c_1)$ ,  $G_2 = (V_2, c_2)$  を有向多重グラフとし,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  とする. このとき, 次の集合  $V$  と重み関数  $c: V \times V \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$  により定まる有向多重グラフ  $(V, c)$  を  $G_1$  と  $G_2$  の **join** といい,  $G_1 \overleftarrow{\nabla}_k G_2$  とかく.

- $V = V_1 \cup V_2$ ,
- 任意の  $(v_i, v_j) \in V \times V$  に対して,

$$c(v_i, v_j) = \begin{cases} c_1(v_i, v_j) & v_i, v_j \in V_1 \text{ のとき} \\ c_2(v_i, v_j) & v_i, v_j \in V_2 \text{ のとき} \\ k & v_i \in V_2, v_j \in V_1 \text{ のとき} \\ 0 & v_i \in V_1, v_j \in V_2 \text{ のとき} \end{cases}$$

である.

**Example 2.9.**  $G_1 = (\overrightarrow{\mathcal{K}}_2, \hat{2})$ ,  $G_2 = (\overrightarrow{\mathcal{K}}_3, \hat{3})$  とすれば,  $G_1 \overleftarrow{\nabla}_k G_2$  は図 7 のようになる.

## 2.2 先行研究

主結果に関する先行研究を述べる.

**Theorem 2.10** (Basi-Caprau [5]).  $T(p, 2)$  をトーラス結び目とし,  $R_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) を 2 面体カンドルとする. このとき,

- $\gcd(p, n) = 1$  のとき,  $\mathcal{Q}_{R_n}(T(p, 2)) = (\overleftarrow{\mathcal{K}}_n, \hat{n})$ ,

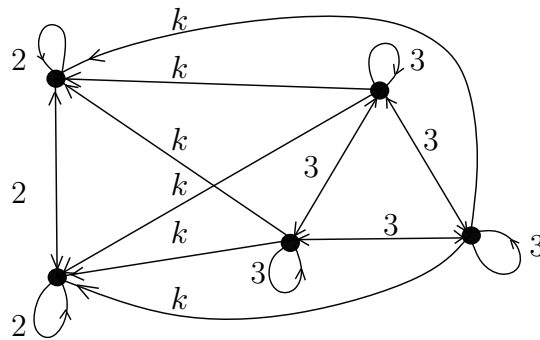


図7 join の例.

- $\gcd(p, n) = c$  ( $c$ : 素数) のとき,  $\mathcal{Q}_{R_n}(T(p, 2)) = (\overrightarrow{\mathcal{K}}_n, \hat{n}) \overleftarrow{\nabla}_{\frac{\hat{n}}{c}} (\overrightarrow{\mathcal{K}}_{n(c-1)}, \frac{\hat{n}}{c})$

である.

**Theorem 2.11** (Zhou-Liu [6]).  $T(p, 3)$  をトーラス結び目とし,  $R_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) を 2 面体カンドルとする. このとき,

- $p = 5, 6k + 1, 6k + 5$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) のとき,

$$\mathcal{Q}_{R_n}(T(p, 3)) = (\overrightarrow{\mathcal{K}}_n, \hat{n}),$$

- $p = 4, 6k + 2, 6k + 4$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) のとき,

$$\mathcal{Q}_{R_n}(T(p, 3)) = \begin{cases} (\overrightarrow{\mathcal{K}}_n, \hat{n}) & \gcd(3, n) = 1 \text{ のとき} \\ (\overrightarrow{\mathcal{K}}_n, \hat{n}) \overleftarrow{\nabla}_{\frac{\hat{n}}{3}} (\overrightarrow{\mathcal{K}}_{2n}, \frac{\hat{n}}{3}) & \gcd(3, n) = 3 \text{ のとき,} \end{cases}$$

- $p = 3, 6k + 3$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) のとき,

$$\mathcal{Q}_{R_n}(T(p, 3)) = \begin{cases} (\overrightarrow{\mathcal{K}}_n, \hat{n}) & \gcd(2, n) = 1 \text{ のとき} \\ (\overrightarrow{\mathcal{K}}_n, \hat{n}) \overleftarrow{\nabla}_{\frac{\hat{n}}{2}} (\sqcup_3(\overrightarrow{\mathcal{K}}_n, \frac{\hat{n}}{2})) & \gcd(2, n) = 3 \text{ のとき,} \end{cases}$$

- $p = 6k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) のとき,

$$\mathcal{Q}_{R_n}(T(p, 3)) = (\overrightarrow{\mathcal{K}}_n, \hat{n}) \overleftarrow{\nabla}_{\hat{1}} \{(\sqcup_3(\overrightarrow{\mathcal{K}}_{n(n-1)}, \hat{1})) \sqcup (\sqcup_{n-2}(\overrightarrow{\mathcal{K}}_{n(n-1)}, \hat{1}))\}$$

である.

### 3 2 面体カンドルに付随する 2 橋絡み目とプレッツェル絡み目のカンドル彩色クイバー

主結果を述べる.

**Main Theorem 3.1.**  $S(\alpha, \beta)$  ( $\alpha > 0, -\alpha < \beta < \alpha, \gcd(\alpha, \beta) = 1, \beta : \text{奇数}$ ) を 2 橋絡み目の Schubert の標準形とし,  $R_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) を 2 面体カンドルとする. また,  $c := \gcd(\alpha, n)$  とし,  $k \in \{1, \dots, c-1\}$  とする. このとき,

$$Q_{R_n}(S(\alpha, \beta)) = \begin{cases} (\overrightarrow{\mathcal{K}}_n, \hat{n}) & c = 1 \text{ のとき} \\ (\overrightarrow{\mathcal{K}}_n, \hat{n}) \overleftarrow{\nabla}_{\frac{\hat{n}}{c}} (\overrightarrow{\mathcal{K}}_{n(c-1)}, \frac{\hat{n}}{c}) & c : \text{素数のとき} \\ (\overrightarrow{\mathcal{K}}_n, \hat{n}) \overleftarrow{\nabla}_{\frac{n}{c} \cdot \widehat{\gcd(k,c)}} \Gamma_{\alpha, n} & \text{それ以外} \end{cases}$$

である.

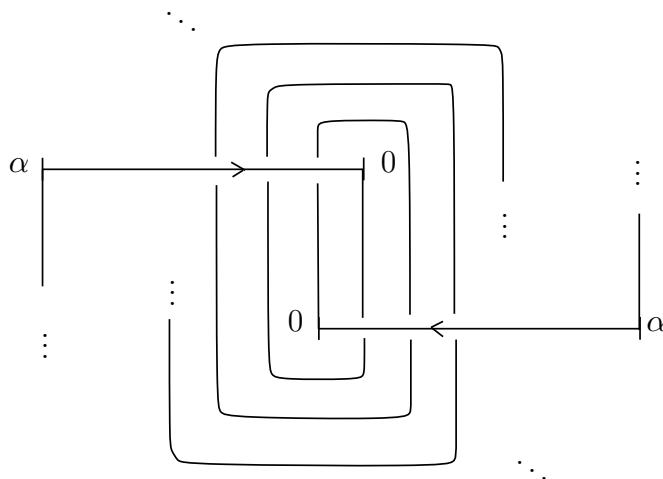


図 8  $S(\alpha, \beta)$  の図式.

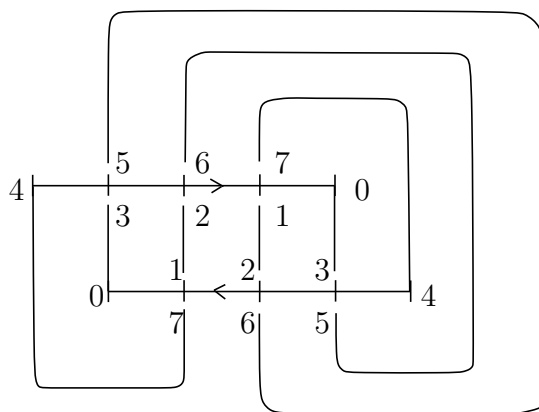


図 9 Schubert の標準形の例  $S(4, 3)$ .

**Main Theorem 3.2.**  $P(d_1, \dots, d_m)$  ( $d_i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ) を プレッツェル絡み目とし,  $R_n$  ( $n \in$



N) を 2 面体カンドルとする. このとき,

$$|\text{Col}_{R_n}(P(d_1, \dots, d_m))| = \begin{cases} n \cdot \gcd(\sum_{i=1}^m d_i^{-1}, n) & \text{任意の } i \text{ に対し } \gcd(d_i, n) = 1 \\ & \text{つまり, } n \text{ が素数のとき} \\ n \cdot \gcd(d_i \sum_{i=1}^m d_i^{-1}, n) & \gcd(d_i, n) \neq 1 \text{ を満たす } i \text{ が} \\ & \text{ただ一つ存在するとき} \end{cases}$$

であり,

- 任意の  $i$  に対し  $\gcd(d_i, n) = 1$  のとき,  
 $x_1 := \sum_{i=1}^m d_i^{-1}$  とおき,  $c := \gcd(x_1, n)$ ,  $k \in \{1, \dots, c-1\}$  とすると,

$$\mathcal{Q}_{R_n}(P(d_1, \dots, d_m)) = \begin{cases} (\overrightarrow{\mathcal{K}}_n, \hat{n}) & c = 1 \text{ のとき} \\ (\overrightarrow{\mathcal{K}}_n, \hat{n}) \overleftarrow{\nabla}_{\frac{\hat{n}}{c}} (\overrightarrow{\mathcal{K}}_{n(c-1)}, \frac{\hat{n}}{c}) & c : \text{素数のとき} \\ (\overrightarrow{\mathcal{K}}_n, \hat{n}) \overleftarrow{\nabla}_{\frac{n}{c} \cdot \widehat{\gcd(k,c)}} \Gamma_{x_1, n} & \text{それ以外} \end{cases}$$

- $\gcd(d_i, n) \neq 1$  を満たす  $i$  がただ一つ存在するとき,  
 $x_2 := d_i \sum_{i=1}^m d_i^{-1}$  とおき,  $c := \gcd(x_2, n)$ ,  $k \in \{1, \dots, c-1\}$  とすると,

$$\mathcal{Q}_{R_n}(P(d_1, \dots, d_m)) = \begin{cases} (\overrightarrow{\mathcal{K}}_n, \hat{n}) & c = 1 \text{ のとき} \\ (\overrightarrow{\mathcal{K}}_n, \hat{n}) \overleftarrow{\nabla}_{\frac{\hat{n}}{c}} (\overrightarrow{\mathcal{K}}_{n(c-1)}, \frac{\hat{n}}{c}) & c : \text{素数のとき} \\ (\overrightarrow{\mathcal{K}}_n, \hat{n}) \overleftarrow{\nabla}_{\frac{n}{c} \cdot \widehat{\gcd(k,c)}} \Gamma_{x_2, n} & \text{それ以外} \end{cases}$$

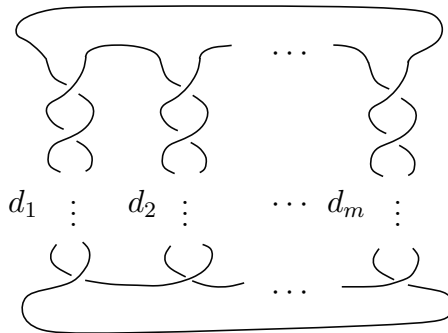


図 10  $P(d_1, \dots, d_m)$  の図式.

次が成り立つ.

**Theorem 3.3.**  $L$  を交点数が  $m$  の有向結び目 (絡み目) 図式とし,  $R_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) を 2 面体カンドルとする.  $\mathcal{Q}(L)$  の交点関係式系が,  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  と  $d \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) に対し,  $dy_i = dy_j \pmod n$  とかけるとする. このとき,  $c := \gcd(d, n)$  とし,  $k \in \{1, \dots, c-1\}$

とすると,

$$|\text{Col}_{R_n}(L)| = nc$$

であり,

$$Q_{R_n}(L) = \begin{cases} \left( \overrightarrow{\mathcal{K}}_n, \hat{n} \right) & c = 1 \text{ のとき} \\ \left( \overrightarrow{\mathcal{K}}_n, \hat{n} \right) \overleftarrow{\nabla}_{\frac{\hat{n}}{c}} \left( \overrightarrow{\mathcal{K}}_{n(c-1)}, \frac{\hat{n}}{c} \right) & c : \text{素数のとき} \\ \left( \overrightarrow{\mathcal{K}}_n, \hat{n} \right) \overleftarrow{\nabla}_{\frac{\hat{n}}{c \cdot \gcd(k,c)}} \Gamma_{d,n} & \text{それ以外} \end{cases}$$

である.

#### 4 今後の課題

Main Theorem 3.2 について, 前述の二つの場合以外の場合におけるカンドル彩色数とクイバーを決定したい. また, Theorem 3.3 の仮定を満たす絡み目がどのようなものであるのかを明らかにしたい.

#### 謝辞

研究集会「結び目の数理 VI」での講演の機会を与えてくださった世話人である東京女子大学の大山淑之先生, 新國亮先生に感謝申し上げます. ありがとうございます. また, 講演後に質問やアドバイスを下さった先生方にもお礼申し上げます. 本研究集会での発表までの長い期間, 丁寧にご指導くださった慶應義塾大学の古宇田悠哉先生に感謝いたします.

#### 参考文献

- [1] D. Joyce, A classifying invariant of knots, the knot quandle, J. Pure Appl. Algebra **23**, (1982), no. 1, 37-65.
- [2] 鎌田聖一, 曲面結び目理論, 丸善出版社, 2012.
- [3] S. V. Matveev, Distributive groupoids in knot theory, Math. USSR-Sb., **47** (1982), 73-83.
- [4] K. Cho and S. Nelson, Quandle Coloring Quivers, J. Knot Theory Ramifications, **29** (2020), no. 12, Paper No. 2050084.
- [5] J. Basi and C. Caprau, Quandle coloring quivers of  $(p, 2)$ -torus links, J. Knot Theory Ramifications, **31** (2022), no. 9, Paper No. 2250057.
- [6] B. Zhou and X. Liu, Quandle coloring quivers of  $(p, 3)$ -torus links, J. Knot Theory Ramifications, **32** (2023), no. 3, Paper No. 2350016.