双曲空間の等長変換がなすカンドル *

大阪公立大学 大学院理学研究科 数学専攻
甲斐涼哉 (Ryoya Kai) †

概要

Inoue-Kabaya [3] は，3 次元双曲空間の放物型変換全体がなすカンドル $\mathcal{P}$ による彩色を用いて，双曲結び目の複素体積の計算手法を構築した．ここで用いられたカンドルに注目し，双曲空間の向きを保つ等長変換の共役類上のカンドルについて得られた結果を紹介する．

1 導入

補空間が有限体積完備双曲構造を持つ結び目を双曲結び目という．3 次元以上では有限体積完備双曲構造は位相不変量となることが知られている (Mostow 剛性定理)．したがって，有限体積双曲構造から計算される幾何学的な量 (体積や最短測地線の長さなど) は結び目の位相不変量となる．結び目の補空間の双曲構造の研究では，結び目の補空間の基本群から等長変換群 $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$ への準同型 (ホロノミー表現) が重要な役割を果たす．

カンドルは Joyce と Matveev によって独立に導入された代数系である．カンドルの演算規則は結び目の Reidemeister 移動と対応する．また，結び目の補空間の基本群である結び目群と同様に，結び目カンドルが定義され結び目の不変量となる．結び目カンドルから別のカンドル X への準同型は X-彩色と呼ばれ，結び目群からの準同型のある種の精密化となっている．

カンドルと双曲幾何学に関する先行研究として [2] や [3] がある．そこでは，結び目カンドルと双曲体積 (もしくは複素体積) との関係性について研究されている．特に [3] では，放物型等長変換全体がなすカンドル $\mathcal{P}$ へのカンドル準同型を用いて，結び目の補空間の複素体積の計算手法が構築されている．本稿では，双曲空間の等長変換がなすカンドルの構造を紹介する．特に，あるクラスの Klein 群とそこに含まれる放物型変換から，$\mathcal{P}$ の離散部分カンドルを構成できることを紹介する．

* 本研究は JST 科学技術イノベーション創出に向けた大学フェローシップ創設事業 JPMJFS2138 の支援を受けたものです．
† E-mail:sw23889b@st.omu.ac.jp

2 準備

2.1 カンドル

はじめにカンドルを紹介する．詳細は [4] などを参照．

定義 2.1. 空でない集合 X 上の二項演算 $\triangleleft : X \times X \to X$ が次を満たすとき，$(X, \triangleleft)$ をカンドルという;

1. 任意の $x \in X$ に対して，$x \triangleleft x = x$,
2. 任意の $y \in X$ に対して，$S_y(x) = x \triangleleft y$ で定義される写像 $S_y : X \to X$ は全単射,
3. 任意の $x, y, z \in X$ に対して，$(x \triangleleft y) \triangleleft z = (x \triangleleft z) \triangleleft (y \triangleleft z)$.

全単射 $S_y : X \to X$ を y における点対称という．

カンドルの間の写像が演算を保つときカンドル準同型という．特に，全単射なカンドル準同型をカンドル同型という．点対称はカンドル同型である．

例 2.2. 群 G に演算を $g \triangleleft h := h^{-1}gh$ で定義すると，$(G, \triangleleft)$ はカンドルとなる．これを G の共役カンドルといい $\mathrm{Conj}(G)$ とかく．

例 2.3. 群 G とその部分群 H と G の自己同型 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ で H への制限が恒等写像であるものの組 (G, H, σ) をカンドルの三つ組みと呼ぶ．G の H による右剰余類の集合 $H\backslash G$ 上の演算を，$Hg \triangleleft Hh := H\rho(gh^{-1})h$ で定義すると，$(H\backslash G, \triangleleft)$ はカンドルとなる．このカンドルを $Q(G, H, \sigma)$ とかく．

定義 2.4. カンドル X 上のカンドル同型全体がなす群を自己同型群といい $\mathrm{Aut}(X)$ とかく．カンドル X の点対称全体が生成する群をカンドル X の内部自己同型群といい，$\mathrm{Inn}(X)$ とかく．

自己同型群が推移的に作用するカンドルを，等質カンドルという．また，内部自己同型群が推移的に作用するカンドルを，連結カンドルという．連結カンドルは等質カンドルである．任意の等質カンドルは，あるカンドルの三つ組 (G, H, σ) が定義するカンドルと同型であることが知られている [4, Theorem 7.1]．本稿では，等質カンドルに対するカンドルの三つ組 (G, H, σ) を等質表示とよぶ.

2.2 3 次元双曲幾何学

ここでは，3 次元双曲空間を紹介する．詳細は [5] などを参照．四元数体の部分集合 $\mathbb{H}^3 = \{z + tj \mid z \in \mathbb{C}, t > 0\}$ に計量

$$ds^2 = \frac{|dz|^2 + dt^2}{t^2}$$

を与える．このとき，$(\mathbb{H}^3, ds)$ を 3 次元双曲空間 (の上半空間モデル) という．また，行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ に対して，向きを保つ等長変換

$$f_A : \mathbb{H}^3 \to \mathbb{H}^3,\ q \mapsto (aq + b)(cq + d)^{-1}$$

が定義でき, 全射準同型 $\pi : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ が得られる．特に, $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ は $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\{\pm I_2\}$ と同型であることがわかる．対応する行列によって，向きを保つ等長変換 $f_A \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \setminus \{\mathrm{id}\}$ $(A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ は次のように分類できる：

- f_A : 楕円型 $\iff$ $\mathrm{tr}A \in (-2, 2)$,
- f_A : 放物型 $\iff$ $\mathrm{tr}A = \pm 2$,
- f_A : 斜航型 $\iff$ $\mathrm{tr}A \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$.

これらの分類は，双曲空間 $\mathbb{H}^3$ およびその理想境界 $\partial \mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}P^1$ への作用を用いて，以下のように言い換ることができる：

- f : 楕円型 $\iff$ f はある測地線 $l \subset \mathbb{H}^3$ 上の点を固定する,
- f : 放物型 $\iff$ f は $\mathbb{H}^3$ に固定点を持たず，$\partial \mathbb{H}^3$ のただ 1 点を固定する,
- f : 斜航型 $\iff$ f は $\mathbb{H}^3$ に固定点を持たず，$\partial \mathbb{H}^3$ の 2 点を固定する.

3 $\mathbb{H}^3$ の等長変換がなすカンドル

$\mathbb{H}^3$ の向きを保つ等長変換から得られるカンドルについて紹介する．$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ であるが, 簡単のために $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ を用いて具体的に結果を述べる.

$t \in \mathbb{C}$ に対して次の集合

$$\widetilde{X}_t = \{A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \setminus \{\pm I_2\} \mid \mathrm{tr}(A) = t\} \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$$

を考える．各 $\widetilde{X}_t$ は $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の共役カンドルの部分カンドルとしてカンドルの構造を持つ.

注意 3.1. $\pi : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \cong \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ を自然な射影とする．$z \sim -z$ によって定まる $\mathbb{C}$ 上の同値関係の商集合を $\mathcal{T}$ と書く．$t \in \mathbb{C}$ に対して，$[t] = \{\pm t\} \in \mathcal{T}$ である．$\tau \in \mathcal{T}$ に対して,

$$X_\tau = \pi\left(\bigcup_{t \in \tau} \widetilde{X}_t\right)$$

は $\mathrm{Conj}(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}))$ の部分カンドルである．X_τ に対しても，$\widetilde{X}_t$ と概ね同様な結果が得られる.

3.1 等質表示

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の次の部分群を考える；

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & \mu \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \middle| \varepsilon \in \{\pm 1\}, \mu \in \mathbb{C} \right\},$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \middle| \mu \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

また，各 $t \in \mathbb{C}$ に対して，基点 $A_t \in X_t$ を次のようにとる；

$$A_t = \begin{cases} \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i^\theta} \end{pmatrix} & (t = 2\cos\theta \in (-2,2),\ \theta \in (0,\pi)) \\ \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} & (t = 2\varepsilon \in \{\pm 2\},\ \varepsilon \in \{\pm 1\}) \\ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} & (t = \lambda + \lambda^{-1} \in \mathbb{C} \setminus [-2,2],\ |\lambda| > 1) \end{cases}$$

また，$g \in G$ の逆元が定める内部自己同型を σ_g とかく．以上の記号のもとで，$\widetilde{X}_t$ の等質表示は次のように与えられる．

定理 3.2. 各 $t \in \mathbb{C}$ に対して，$\widetilde{X}_t$ は連結カンドルで，次の等質表示を持つ：

$$\widetilde{X}_t \cong \begin{cases} Q(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}), P, \sigma_{A_t}) & (t = \pm 2), \\ Q(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}), S, \sigma_{A_t}) & (t \neq \pm 2). \end{cases}$$

注意 3.3. $\tau \neq [0]$ のとき，X_τ も $\widetilde{X}_t$ と同様な等質表示を持つ．$\tau = [0]$ のとき，$X_{[0]} \cong (\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}), \pi(S'), \sigma_{f_{A_0}})$ なる等質表示を持つ．ここで，

$$S' = S \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu^{-1} & 0 \end{pmatrix} \middle| \mu \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

3.2 カスプ付き多様体に対応する Klein 群から得られるカンドル

次に，あるクラスの Klein 群からカンドルを構成し，その性質について紹介する．部分群 $\Gamma < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ が次の条件を満たすとする：

1. $\Gamma < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ は離散部分群 (Klein 群),
2. $\mathbb{H}^3/\Gamma$ はカスプを持つ,
3. $\mathbb{H}^3/\Gamma$ は有限体積 (cofinite),
4. $\mathbb{H}^3/\Gamma$ は (orbifold ではなく) 多様体 (torsion-free).

これらの仮定は，与えた Klein 群が非コンパクト有限体積完備双曲多様体の基本群と同型であることを意味している．以下，簡単のためにカスプは唯一つであるとする．条件 3 より，Γ は放物型変

換を含む．放物型変換 $\gamma \in \Gamma$ を 1 つ固定し，γ の固定点を $x \in \partial\mathbb{H}^3$ とする．さらに，

$$H_\gamma = \{g \in \Gamma \mid g \cdot x = x\}$$

とする．H_γ は γ と可換な Γ の元全体が成す部分群と一致し，$\mathbb{Z}^2$ と同型となる．特に，条件 1, 4 から，H_γ の非自明な元は放物型である．このとき，次が成り立つ：

命題 3.4. $(\Gamma, H_\gamma, \sigma_\gamma)$ はカンドルの 3 つ組.

注意 3.5. 双曲結び目 K の結び目カンドル $Q(K)$ はこの構成方法で得られる．実際，補空間の有限体積完備双曲構造に対応するホロノミー表現 $\rho : G(K) \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ によって結び目群 $G(K)$ を Klein 群とみなし，γ としてメリディアンを選ぶとよい.

カンドル $Q(\Gamma, H_\gamma, \sigma_\gamma)$ は抽象的な群の剰余類集合として定義されるが，次のことが示せる：

定理 3.6. 単射カンドル準同型 $Q(\Gamma, H_\gamma, \sigma_\gamma) \to X_{[2]}$ が存在して，その像は $X_{[2]}$ の離散部分カンドルである.

定理 3.6 より，双曲結び目の結び目群が $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ の離散部分群であることのアナロジーとして，結び目カンドルが $X_{[2]}$ の離散部分カンドルとして実現できる．証明は，以下の 2 つの補題の仮定を具体的に確認すればよい.

補題 3.7. $\rho : \Gamma \to G$ を群準同型, (G, H, σ) と (Γ, H', σ') をカンドルの三つ組みとして，$H' \subset \rho^{-1}(H)$ と $\sigma \circ \rho = \rho \circ \sigma'$ を満たすとする．このとき，次が成り立つ：

1. ρ はカンドル準同型 $\overline{\rho} : Q(\Gamma, H', \sigma') \to Q(G, H, \sigma)$ を導く.
2. $H' = \rho^{-1}(H)$ のとき，$\overline{\rho}$ は単射カンドル準同型.

補題 3.8 ([1, Section 1.2, Lemma 4])**.** Lie 群 G の閉部分群 H と離散部分群 Γ で $H/(H \cap \Gamma)$ がコンパクトであるとする，$p : G \to G/H$ を自然な射影とする．このとき，$p(\Gamma)$ は G/H の離散部分集合となる.

参考文献

[1] R. Godement. *Introduction to the Theory of Lie Groups.* Universitext. Springer International Publishing, Cham, 2017.

[2] A. Inoue. Quandle and hyperbolic volume. *Topology and its Applications*, Vol. 157, No. 7, pp. 1237–1245, 2010.

[3] A. Inoue and Y. Kabaya. Quandle homology and complex volume. *Geometriae Dedicata*, Vol. 171, pp. 265–292, 2014.

[4] D. Joyce. A classifying invariant of knots, the knot quandle. *Journal of Pure and Applied Algebra*, Vol. 23, No. 1, pp. 37–65, 1982.

[5] 谷口雅彦, 松崎克彦. 双曲的多様体とクライン群. 日本評論社, 1993.