三角群のモジュラー結び目に関する Rademacher 記号と 2-コサイクルについて

松坂俊輝（名古屋大学高等研究院）*

モジュラー結び目という言葉を初めて耳にしたのは，2017 年 4 月，京都大学数論合同セミナーでの Özlem Imamoḡlu さんの講演 “Modular cocycles and linking numbers”においてである．金子昌信先生の勧めで参加したその講演は，ちょうどその頃勉強していた楕円モジュラー j 関数のサイクル積分からスタートして，モジュラー結び目たちの絡み数を計算するという内容で，結び目の部分は当時あまり理解できなかったものの，非常に印象に残る内容であり，いつか何か関連して仕事をしてみたいと思うようになった．それから 3 年が経ち，2020 年，新型コロナウイルス感染症の影響で研究集会等が次々と中止となるなか，思いがけず東京電機大学の植木潤さんと Friday Tea Time Zoom Seminar というオンライン研究セミナーを開催することとなった．植木さんとはそれまでほとんど面識もなかったのであるが，Zoom というオンラインミーティングツールを通して話をする機会が増え，そうして常々気になっていた結び目理論について沢山のことを教えてもらい，今回の共同研究にたどり着いた，というわけである．

本記事は研究集会「結び目の数理 III」における，2020 年 12 月 24 日の筆者の同タイトルの講演に基づくものである．世話人の大山淑之さん，新國亮さん，また本研究集会で講演するよう勧めてくださった共同研究者である植木潤さんに，この場を借りて感謝したい．繰り返しではあるが，本研究は東京電機大学の植木潤さんとの共同研究であり，また JSPS 科研費 JP20K14292 および JP19K14538 の助成を受けたものである．

1 Ghys の結果

モジュラー結び目が定義されたのは，Étienne Ghys の講演 “Knots and dynamics” [Ghy07] において，2006 年の国際数学者会議でのことである．彼はローレンツアトラクターに含まれる周期軌道（ローレンツ結び目）に関する Birman–Williams [BW83] の仕事を紹介した後，一方でモジュラー群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の元に対しても，ある周期軌道（モジュラー結び目）がトレフォイル $K_{2,3}$ の補空間 $S^3 - K_{2,3}$ 内に定義できると説明する．一見して由来の全く異なる対象であるにも関わらず，これら 2 種類の結び目の集合は一致する，というのが Ghys の主張である．さらに，各モジュラー結び目 C_γ に対して，絡み数 $\mathrm{Lk}(C_\gamma, K_{2,3})$ が，これまた出自の異なる Rademacher 記号 $\Psi(\gamma)$ でぴったり与えられる．本研究の目的は，この絡み数と Rademacher 記号に関する結果を，トレフォイル $K_{2,3}$ に限らず一般のトーラス結び目 $K_{p,q}$ に対して拡張することである．

ICM2006 における Ghys の講演スライド，および講演動画は [Ghy06] において公開されている．また Ghys–Leys による画像付きの解説記事も [GL06] で見ることができるため，詳細についてはそちらに譲ることとし，ここでは我々の結果を述べるために必要な事項のみを復習することとする．

* Email: matsusaka.toshiki@math.nagoya-u.ac.jp

1.1 モジュラー結び目

モジュラー群の元 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が $|\operatorname{tr}(\gamma)| > 2$ を満たすとき，γ を**双曲元**と呼ぶ．さらに γ が（モジュラー群の）他の元の冪で書けないとき，γ は**原始的**であるという．ここでは原始的な双曲元 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ であって，特に簡単のために $\operatorname{tr}(\gamma) > 2$ かつ $c > 0$ を満たすものを考える．さて，群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ は上半平面 $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ および，その境界に一次分数変換 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) z = \frac{az+b}{cz+d}$ で作用するのであった．このとき双曲元 $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の固定点は，互いに共役な実二次無理数となる．これは $\gamma z = z$ から従う二次方程式 $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ を解くことで確かめられる．この固定点を w_γ, w'_γ と書き，$w_\gamma > w'_\gamma$ と大小関係を定めておく．スケール行列 M_γ を

$$M_\gamma = \frac{1}{\sqrt{w_\gamma - w'_\gamma}} \begin{pmatrix} w_\gamma & w'_\gamma \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

で定めると，これは $M_\gamma^{-1} \gamma M_\gamma = \left(\begin{smallmatrix} \xi_\gamma & 0 \\ 0 & \xi_\gamma^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ のように γ を対角化する．ここで $\xi_\gamma > 1$ であることに注意する．このとき，空間 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 内に閉曲線

$$C_\gamma(t) = M_\gamma \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad (0 \leq t \leq \log \xi_\gamma)$$

を定めることができる．この曲線は，射影 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \ni g \mapsto gi \in \mathbb{H}$ によって，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ 上の閉測地線へとうつる．

定義 1.1. 原始的な双曲元 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ であって，$\operatorname{tr}(\gamma) > 2$ かつ $c > 0$ なるものをとる．このとき，同相 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to S^3 - K_{2,3}$ による曲線 $C_\gamma(t)$ の像を単に C_γ と書き，**モジュラー結び目**と呼ぶ．ここで $K_{2,3}$ はトレフォイルである．

上の（微分）同相 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to S^3 - K_{2,3}$ は Milnor の本 [Mil71, 84 ページ] に与えられている（もしくは [DIT17, Appendix A] や [Tsa13] にも書かれている）．また定義から明らかなように，任意の $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対し，$C_{g^{-1}\gamma g} = C_\gamma$ が成り立つ，すなわち，モジュラー結び目は双曲元 γ の共役類に対して定まる対象である．Ghys–Leys の記事 [GL06] にはいくつかの具体例が描画されており，例えば双曲元 $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ が定めるモジュラー結び目は，$S^3 - K_{2,3}$ 内の自明な結び目となる．

1.2 Rademacher 記号

Rademacher 記号の起源は 1892 年の Dedekind の仕事にある．無限積で定義される上半平面上の正則関数

$$\Delta(z) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}, \qquad (q = e^{2\pi i z})$$

は重さ 12 のカスプ形式になることが知られている．つまり，任意の $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対し，変換則 $\Delta(\gamma z) = (cz+d)^{12} \Delta(z)$ が成り立つ．さらに $\Delta(z)$ は $\mathbb{H}$ 上に零点も極も持たないため，正則関数 $\log \Delta(z)$ が定義される．この関数に対し次の変換則

$$\log \Delta(\gamma z) - \log \Delta(z) = 12 \operatorname{sgn}(c)^2 \log \left(\frac{cz+d}{i \operatorname{sgn}(c)} \right) + 2\pi i \Phi(\gamma)$$

を考えると，ある整数値関数 $\Phi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ が必要となる．この関数 $\Phi(\gamma)$ を Dedekind の名前にちなんで，**Dedekind 記号**と呼ぶことにする．ここで，対数関数の枝を $\operatorname{Im} \log z \in [-\pi, \pi)$ で指定し，また $c = 0$ のとき，右辺の第一項は 0 であるとみなしている．

1956 年，Rademacher は Dedekind 記号の定義をわずかに修正することで，より良い性質を持つ関数を導入している．

定義 1.2. 関数 $\Psi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ を

$$\Psi(\gamma) = \Phi(\gamma) - 3\,\mathrm{sgn}(c(a+d))$$

によって定める．これを **Rademacher 記号**と呼ぶ．

この微修正により，関数 Ψ は次の性質を得る：任意の $\gamma, g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対し，

$$\Psi(\gamma) = \Psi(-\gamma) = -\Psi(\gamma^{-1}) = \Psi(g^{-1}\gamma g)$$

が成り立つ．特に $\Psi(\gamma)$ が類不変量であることを注意しておく．これらの Dedekind や Rademacher の仕事は，Rademacher–Grosswald によるテキスト “Dedekind sums” [RG72] に詳しくまとめられている．一見すると単なる特殊関数の一つに見える Rademacher 記号 $\Psi(\gamma)$ であるが，Atiyah [Ati87, Theorem 5.60] によれば，この特殊関数は上記のカスプ形式を用いる定義の他にも，Hirzebruch’s signature defect，Shimizu L 関数の特殊値など，合計 7 つもの異なる “顔”をもっている．さらに Barge–Ghys [BG92] による Euler 類を用いた特徴づけ，今回の主題でもあるモジュラー結び目との関連からも，この Rademacher 記号が非常に豊かな性質を有していることを窺い知ることができるであろう．

1.3 Ghys の結果（正確な主張）

こうして定義される 2 つの対象，モジュラー結び目 C_γ と Rademacher 記号 $\Psi(\gamma)$ が，絡み数という不変量を通して密接に関係する，というのが Ghys の結果の一つである．

定義 1.3. S^3 内の異なる 2 つの有向結び目 K_1, K_2 に対し，一次ホモロジー群 $H_1(S^3 - K_2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の生成元 $[\ell]$ を一つ固定する．このとき，**絡み数** $\mathrm{Lk}(K_1, K_2) \in \mathbb{Z}$ を次で定義する．

$$[K_1] = \mathrm{Lk}(K_1, K_2)[\ell] \in H_1(S^3 - K_2; \mathbb{Z}).$$

よって，トレフォイル $K_{2,3}$ の向きや生成元 $[\ell]$ を適切に取ることで，モジュラー結び目 C_γ と $K_{2,3}$ の絡み数を定義できるわけであるが，これに対し，Ghys [Ghy07] は次の主張を示した．

定理 1.4. 原始的な双曲元 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ であって，$\mathrm{tr}(\gamma) > 2$ かつ $c > 0$ なるものをとる．このとき，$\mathrm{Lk}(C_\gamma, K_{2,3}) = \Psi(\gamma)$ が成り立つ．

この定理を拡張することを考えるとき，いくつかの問題設定がすぐに思い浮かぶであろう．

(1) 2 つのモジュラー結び目 C_γ, C_σ に対し，その絡み数 $\mathrm{Lk}(C_\gamma, C_\sigma)$ は計算できるか．
(2) トレフォイルの結び目補空間を，他の結び目の補空間に取り替えられるか．
(3) 絡み数以外の結び目不変量を計算できるか．

一つ目の問いについては，Ghys 自身も論文中に記しており，2017 年に（少し問題を修正した上で）Duke–Imamoḡlu–Tóth [DIT17] が一つの答えを与えている．三つ目の問いについては，著者は現状何も把握していないが，何か分かると面白いだろうと期待している．今回の研究では，この二つ目の問いについて考察を行い，トレフォイル $K_{2,3}$ を一般のトーラス結び目 $K_{p,q}$ に拡張することに成功したので，次の章でその内容について紹介する．

2 トーラス結び目への拡張

何をもって拡張とするか，まず考えるべき問題である．ここでは次のように問題の設定を行なった．

(1) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cong S^3 - K_{2,3}$ に対応する同相が $S^3 - K_{p,q}$ にも存在するか？
(2) モジュラー結び目に対応するものは何か？
(3) Rademacher 記号を与えるような，カスプ形式 $\Delta(z)$ の対応物は何か？
(4) これらが全てうまくいったとして，“絡み数 = Rademacher 記号”という形の等式を得られるか？特に $p = 2, q = 3$ の場合に Ghys の結果を含んでいるか？

結論としては，これらの問い全てに対し，自然な回答を与えることができた．特に，整数論の観点からはあまり研究されてこなかった三角群に関する保型形式が，ここでは非常に重要な役割を果たすこととなり，（個人的には）大変興味深い結果となった．

2.1 三角群

問題にうつる前に，本研究の鍵となる三角群について簡単に復習しておく．まず，(p, q) として互いに素な整数の組で，$2 \leq p < q$ なるものを一つ固定する．

定義 2.1. 次の行列で生成される $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の離散部分群 $\Gamma_{p,q}$ を**三角群**という．

$$T_{p,q} = \begin{pmatrix} 1 & 2\left(\cos\frac{\pi}{p} + \cos\frac{\pi}{q}\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_p = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos\frac{\pi}{p} \end{pmatrix}, \quad U_q = \begin{pmatrix} 2\cos\frac{\pi}{q} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

特に，$\Gamma_{2,3} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が成り立つ．

通常，三角群は上半平面上の三角形の辺における鏡映変換を用いて定義されるので，$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ の部分群として定義されるが，ここでは $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の部分群として定義していることに注意する．射影 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ を通して通常の三角群が得られる．ここでは，三角群 $\Gamma_{p,q}$ に関する性質を箇条書きで記すことにする．

1. 関係式 $T_{p,q} = -U_q S_p$ により，三角群 $\Gamma_{p,q}$ は実際は S_p と U_q で生成される．基本関係式は $S_p^p = U_q^q = -I$ であり，融合積との同型 $\Gamma_{p,q} \cong \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2q\mathbb{Z}$ がある（融合積については，Serre [Ser03] を参照）．

2. 内角 $\pi/p, \pi/q, 0$ をもつ三角形

$$\Delta(p, q, \infty) = \left\{ z \in \mathbb{H} \;\middle|\; -\cos\frac{\pi}{p} \leq \mathrm{Re}(z) \leq \cos\frac{\pi}{q}, |z| \geq 1 \right\} \subset \mathbb{H}$$

を取り，直線 $\{e^{i\theta} \mid 0 < \theta < \pi\}$ に関する鏡映

$$\Delta'(p, q, \infty) = \left\{ z \in \mathbb{H} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{z} = \frac{1}{\overline{z}} \in \Delta(p, q, \infty) \right\}$$

を考える．このとき，$D_{p,q} = \Delta(p, q, \infty) \cup \Delta'(p, q, \infty)$ は三角群 $\Gamma_{p,q}$ の基本領域を与える．特に $\Gamma_{p,q}\backslash\mathbb{H}$ は 1 つのカスプ，2 つの楕円点，そして種数 0 を持つことが分かる．

3. $\Gamma_{p,q}\backslash\mathbb{H}$ は有限体積

$$\mathrm{vol}(\Gamma_{p,q}\backslash\mathbb{H}) = \int_{D_{p,q}} \frac{dxdy}{y^2} = 2\pi\frac{pq - p - q}{pq}$$

を持つ．

2.2 普遍被覆群 $\widetilde{\mathrm{SL}_2}(\mathbb{R})$

ここではまず，天下り的ではあるが，浅井 [Asa70] による普遍被覆群 $\widetilde{\mathrm{SL}_2}(\mathbb{R})$ の構成を復習する．

定義 2.2. 符号関数 $\mathrm{sgn}: \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \{+1, -1\}$ を次で定義する．

$$\mathrm{sgn}(\gamma) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(c) & \text{if } c \neq 0, \\ \mathrm{sgn}(a) = \mathrm{sgn}(d) & \text{if } c = 0 \end{cases}$$

定義 2.3. $W: \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{Z}$ を次で定義する．

$\mathrm{sgn}(\gamma_1)$	$\mathrm{sgn}(\gamma_2)$	$\mathrm{sgn}(\gamma_1\gamma_2)$	$W(\gamma_1, \gamma_2)$
1	1	-1	1
-1	-1	1	-1
	otherwise		0

これは 2-コサイクル，つまり，次の条件を満たす:

$$W(\gamma_1\gamma_2, \gamma_3) + W(\gamma_1, \gamma_2) = W(\gamma_1, \gamma_2\gamma_3) + W(\gamma_2, \gamma_3).$$

普遍被覆群 $\widetilde{\mathrm{SL}_2}(\mathbb{R})$ は，群としては，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の基本群 $\pi_1(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}$ による中心拡大であり，2-コサイクル $W(\gamma_1, \gamma_2)$ が対応するものとして実現される．以下，普遍被覆群 $\widetilde{\mathrm{SL}_2}(\mathbb{R})$ の元を，組 $(\gamma, n) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{Z}$ で表すことにし，積演算

$$(\gamma_1, n_1)(\gamma_2, n_2) = (\gamma_1\gamma_2, n_1 + n_2 + W(\gamma_1, \gamma_2))$$

を備えているとする．

射影 $P: \widetilde{\mathrm{SL}_2}(\mathbb{R}) \ni (\gamma, n) \mapsto \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ に対し，$\widetilde{\Gamma}_{p,q} = P^{-1}(\Gamma_{p,q})$ とし，また任意の $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ に対し，$\widetilde{\gamma} = (\gamma, 0) \in \widetilde{\mathrm{SL}_2}(\mathbb{R})$ とおく．このとき，群 $\widetilde{\Gamma}_{p,q}$ は $\widetilde{S}_p$ と $\widetilde{U}_q$ によって生成され，基本関係式は $\widetilde{S}_p^p = \widetilde{U}_q^q = (-I, 1)$ である．

2.3 問題 (1) と (2)

問題 (1) については有名な事実であった．特に目的の拡張として，2 つの可能性があることが分かる．

1. 空間 $\Gamma_{p,q} \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \cong \widetilde{\Gamma}_{p,q} \backslash \widetilde{\mathrm{SL}_2}(\mathbb{R})$ は，レンズ空間 $L(r, p-1)$ 内の (p,q)-トーラス結び目 $\overline{K}_{p,q}$ の補空間と（微分）同相である．
2. 空間 $G_r \backslash \widetilde{\mathrm{SL}_2}(\mathbb{R})$ は，S^3 内の (p,q)-トーラス結び目 $K_{p,q}$ の補空間と（微分）同相である．

ここで $r = pq - p - q$ とおいている．また群 G_r は $\widetilde{\Gamma}_{p,q}$ の指数 r の正規部分群であり，$\widetilde{S}_p^r$ と $\widetilde{U}_q^r$ で生成される．2 つ目の同相については，Raymond–Vasquez [RV81] によってザイフェルトファイブレーションの理論を用いることで示されており，また Tsanov [Tsa13] によって，両方の同相はより明示的に構成されている．これが問題 (1) に対する答えである．

モジュラー群の場合のモジュラー結び目の定義を思い出すと，それらは測地線流の閉軌道として特徴付けられていた．ここでも同様に定義するのが自然であろう．つまり，原始的な $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_{p,q}$ であって，$\mathrm{tr}(\gamma) > 2$ かつ $c > 0$ なるものに対し，スケール行列 M_γ，固有値 $\xi_\gamma > 1$ を全く同様に定義する．このとき，$\Gamma_{p,q} \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 内の閉曲線

$$C_\gamma(t) = M_\gamma \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad (0 \leq t \leq \log \xi_\gamma) \tag{2.1}$$

を同様に定めることができる．この曲線も，やはり射影 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{H}$ によって，$\Gamma_{p,q}\backslash\mathbb{H}$ 上の閉測地線へとうつる．この閉曲線 $C_\gamma(t)$ の $L(r,p-1) - \overline{K}_{p,q}$ 内の像 C_γ を，**三角群モジュラー結び目**をと呼ぶ.

加えて，$S^3 - K_{p,q}$ 内の三角群モジュラー結び目を定義しよう．まず射影 $P : \widetilde{\mathrm{SL}_2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ について，$P(G_r) = \Gamma_{p,q}$ および $P^{-1}(I) \cap G_r = \langle (I,r) \rangle$ が成り立つことに注意すると，P が r 重被覆 $S^3 - K_{p,q} \to L(r,p-1) - \overline{K}_{p,q}$ を誘導することが分かる．これをまた P で表すことにする．このとき，三角群モジュラー結び目 C_γ に対し，その P による逆像の連結成分ひとつひとつを $S^3 - K_{p,q}$ 内の**三角群モジュラー結び目**と呼ぶことにする．これは以下のように，明示的に記述することも可能である

命題 2.4. 任意の $\gamma \in \Gamma_{p,q}$ に対し，$(\gamma, n) \in G_r$ となるような $n \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ が唯一つ存在する．このとき，各 $\ell \in \mathbb{Z}/\gcd(n,r)\mathbb{Z}$ に対し，閉曲線

$$C_\gamma^{(\ell)}(t) = \left(M_\gamma \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \ell \right) \in G_r\backslash\widetilde{\mathrm{SL}_2}(\mathbb{R}) \cong S^3 - K_{p,q}, \quad \left(0 \le t \le \frac{r}{\gcd(n,r)} \log \xi_\gamma\right)$$

の $S^3 - K_{p,q}$ での像 $C_\gamma^{(\ell)}$ は $P(C_\gamma^{(\ell)}) = C_\gamma$ を満たし，写像 $P : C_\gamma^{(\ell)} \to C_\gamma$ は $r/\gcd(n,r)$ 重被覆となる．この $C_\gamma^{(\ell)}$ を $S^3 - K_{p,q}$ 内の**三角群モジュラー結び目**と呼ぶ.

2.4 問題 (3)：三角群のモジュラー形式

Rademacher 記号を定義するには，無限積で定義されているカスプ形式 $\Delta(z)$ が必要であった．さて前章の内容からして，おそらく三角群に関するモジュラー形式を考えれば良いであろう，ということは推察されるが，そのような "良い" カスプ形式をどうやって取るかが問題である.

次のように考える：直接計算により，

$$\frac{d}{dz} \log \Delta(z) = 2\pi i \left(1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} d \right) q^n \right) = 2\pi i E_2(z)$$

を得る．右辺の $E_2(z)$ は，カスプで高々多項式増大を持つような，重さ 2 の唯一のモックモジュラー形式である．そこでまず，重さ 2 のモックモジュラー形式を調べてみてはどうかと考えた．最初に，調和 Maass 形式の定義を復習する（調和 Maass 形式の一般論については [BFOR17] を参照）.

定義 2.5. 整数 $k \in \mathbb{Z}$ に対し，重さ k の ξ-微分作用素を

$$\xi_k = 2iy^k \overline{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}$$

で定義する．また重さ k の双曲 Laplace 作用素を

$$\Delta_k = -\xi_{2-k} \circ \xi_k = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + iky \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

で定義する.

定義 2.6. 実解析的関数 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ が次の条件を満たすとき，f は $\Gamma_{p,q}$ に関する重さ $k \in \mathbb{Z}$ の**調和 Maass 形式**であるという.

1. 任意の $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_{p,q}$ に対し，$f(\gamma z) = (cz+d)^k f(z)$ が成り立つ.
2. $\Delta_k f(z) = 0$ が成り立つ.
3. ある $\alpha > 0$ が存在して，$f(x+iy) = O(y^\alpha)$ as $y \to \infty$ が x について一様に成り立つ.

そのような関数全体の集合を $H_k(\Gamma_{p,q})$ で表す．また条件 2 を "$\xi_k f(z) = 0$" で取り替えて定義される関数を**正則モジュラー形式**といい，正則モジュラー形式全体の集合を $M_k(\Gamma_{p,q})$ で表す.

このとき, 明らかに $M_k(\Gamma_{p,q}) \subset H_k(\Gamma_{p,q})$ であり, また ξ-微分作用素は $\xi_k : H_k(\Gamma_{p,q}) \to M_{2-k}(\Gamma_{p,q})$ を定める．条件 1 より，$\lambda = 2(\cos\pi/p + \cos\pi/q)$ とおくとき，$f(z+\lambda) = f(z)$ が成り立つ．よって標準的な議論から，$k \neq 1$ のとき，調和 Maass 形式 $f \in H_k(\Gamma_{p,q})$ は次の形の Fourier 展開を持つことがわかる．

$$f(x+iy) = \sum_{n\geq 0} c^+(n) q_\lambda^n + c^-(0) y^{1-k} + \sum_{n<0} c^-(n) y^{-k/2} W_{-\frac{k}{2},\frac{k-1}{2}}(4\pi|n|y/\lambda) e^{2\pi i n x/\lambda}.$$

ここで，$q_\lambda = e^{2\pi i z/\lambda}$ であり，$W_{\mu,\nu}(y)$ は W-Whittaker 関数である（Whittaker 関数については，[MOS66, Chapter VII] に詳しくまとめられている）．このとき，正則部分

$$\sum_{n\geq 0} c^+(n) q_\lambda^n$$

のことを，**モックモジュラー形式**と呼ぶ.

注意 2.7. 調和 Maass 形式の定義における条件 3（カスプ条件）は論文によって異なることが多い．また，非正則部分の Fourier 展開も Whittaker 関数を用いるもの，不完全ガンマ関数を用いるものなど，様々である．それに伴ってモックモジュラー形式の定義も変わることがあるため，注意が必要である．

例 2.8. Eisenstein 級数

$$E_2^*(z) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} d \right) q^n - \frac{3}{\pi y}$$

は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ 2 の調和 Maass 形式であり，その正則部分 $E_2(z)$ はモックモジュラー形式である．

では，三角群 $\Gamma_{p,q}$ に対して，重さ 2 の調和 Maass 形式を構成しよう．一般に第一種 Fuchs 群に対し，Eisenstein 級数を用いることで保型形式を構成することができる（例えば，Iwaniec [Iwa02] を参照）．三角群 $\Gamma_{p,q}$ におけるカスプ $i\infty$ の固定部分群 $(\Gamma_{p,q})_\infty$ が $\pm\langle T_{p,q}\rangle$ で与えられることに注意すると，重さ $k \in \mathbb{Z}$ の Eisenstein 級数が次で定義される．

$$E_k^{(p,q)}(z,s) = \frac{1}{\lambda^s} \sum_{\gamma \in (\Gamma_{p,q})_\infty \backslash \Gamma_{p,q}} \frac{\mathrm{Im}(\gamma z)^{s-k/2}}{(cz+d)^k}, \qquad (\mathrm{Re}(s) > 1).$$

このとき解析接続の後，$E_2^{(p,q),*}(z) = E_2^{(p,q)}(z,1)$ が定義される．

命題 2.9. 関数 $E_2^{(p,q),*}(z)$ は $\Gamma_{p,q}$ に関する重さ 2 の調和 *Maass* 形式であり，

$$E_2^{(p,q),*}(z) = \frac{1}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} c(n) q_\lambda^n - \frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma_{p,q}\backslash\mathbb{H})} \frac{1}{y} =: E_2^{(p,q)}(z) - \frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma_{p,q}\backslash\mathbb{H})} \frac{1}{y}$$

の形の *Fourier* 展開を持つ．特に $H_2(\Gamma_{p,q})$ は $E_2^{(p,q),*}$ で張られる 1 次元のベクトル空間である．

ここから $\Delta(z)$ の然るべき三角群類似を構成していく．まず，上半平面上の正則関数であって，$F'_{p,q}(z) = 2\pi i r E_2^{(p,q)}(z)$ なる関数 $F_{p,q} : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ をひとつ取る．このとき命題 2.9 より，ある関数 $\psi_{p,q} : \Gamma_{p,q} \to \mathbb{C}$ が存在して，任意の $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_{p,q}$ に対し，

$$F_{p,q}(\gamma z) - F_{p,q}(z) = 2pq \log(cz+d) + 2\pi i \psi_{p,q}(\gamma) \tag{2.2}$$

が成り立つことが分かる．さらにいくつかの計算を組合せることで，$\psi_{p,q}$ が整数値関数であることも分かるため，$\Delta_{p,q}(z) = \exp F_{p,q}(z)$ と定義することで，$\Gamma_{p,q}$ に関する重さ $2pq$ の正則モジュラー形式が

得られる．こうして構成した関数 $\Delta_{p,q}(z)$ は上半平面上に零点も極も持たず，カスプ $i\infty$ に位数 r の零点を持つ．また原始関数 $F_{p,q}$ を適当に取ることで，$\Delta_{p,q}(z) = q_\lambda^r + O(q_\lambda^{r+1})$ となるように正規化できる．これがまさに，モジュラー群の場合の $\Delta(z)$ の三角群類似となるのである．つまり，次が成り立つ：

$$\frac{d}{dz}\log\Delta_{p,q}(z) = F'_{p,q}(z) = 2\pi i r E_2^{(p,q)}(z).$$

定義 2.10. 上の (2.2) で定義した整数値関数 $\psi_{p,q} : \Gamma_{p,q} \to \mathbb{Z}$ を **Rademacher 記号**と呼ぶ．

このままの定義では，$\psi_{2,3}$ は (1.2) で定義されるオリジナルの Rademacher 記号 $\Psi(\gamma)$ と一致しないのだが，次のように修正することで，然るべき Rademacher 記号の定義も得られる．

定義 2.11. 関数 $\Psi_{p,q} : \Gamma_{p,q} \to \mathbb{Z}$ を

$$\Psi_{p,q}(\gamma) = \psi_{p,q}(\gamma) + \frac{pq}{2}\operatorname{sgn}(\gamma)\Big(1 - \operatorname{sgn}\operatorname{tr}(\gamma)\Big)$$

で定義すると，任意の $\gamma, g \in \Gamma_{p,q}$ に対し，

$$\Psi_{p,q}(\gamma) = \Psi_{p,q}(-\gamma) = -\Psi_{p,q}(\gamma^{-1}) = \Psi_{p,q}(g^{-1}\gamma g)$$

が成り立つ．

このように修正すると，$\Psi_{2,3} = \Psi$ を得る．一方でモジュラー結び目を考える上では，常に $\operatorname{tr}(\gamma) > 2$ を仮定しているので，この場合には $\Psi_{p,q}(\gamma) = \psi_{p,q}(\gamma)$ が成り立つ．

2.5 問題 (4)：主結果

以上の定義のもと，次の定理が成り立つ．

定理 2.12. 原始的な双曲元 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_{p,q}$ であって，$\operatorname{tr}(\gamma) > 2$ かつ $c > 0$ なるものをとる．このとき，命題 2.4 で定義した $S^3 - K_{p,q}$ 内の三角群モジュラー結び目 $C_\gamma^{(\ell)}$ と (p,q)-トーラス結び目 $K_{p,q}$ の絡み数は次で与えられる．

$$\operatorname{Lk}_{S^3}(C_\gamma^{(\ell)}, K_{p,q}) = \frac{1}{\gcd(\psi_{p,q}(\gamma), r)}\psi_{p,q}(\gamma) \in \mathbb{Z}.$$

定理 2.13. 上記のように $\gamma \in \Gamma_{p,q}$ をとる．このとき，(2.1) で定義した $L(r, p-1) - \overline{K}_{p,q}$ 内の三角群モジュラー結び目 C_γ と (p,q)-トーラス結び目 $\overline{K}_{p,q}$ の絡み数は次で与えられる．

$$\operatorname{Lk}_{L(r,p-1)}(C_\gamma, \overline{K}_{p,q}) = \frac{1}{r}\psi_{p,q}(\gamma) \in \frac{1}{r}\mathbb{Z}.$$

ここでレンズ空間における絡み数の定義は，[ST80, Section 77] を採用している．特に上の二つの定理において，$(p,q) = (2,3)$ とすると，どちらの場合も Ghys の結果（定理 1.4）を与える．定理 2.12 に対し，証明の概略を示す．

Proof. 上で定義したカスプ形式 $\Delta_{p,q}(z)$ を用いて，連続写像 $\omega_\infty : G_r\backslash\widetilde{\mathrm{SL}_2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}^\times$ を定義できる：

$$\omega_\infty(\gamma, n) = \Delta_{p,q}^{1/r}(\gamma i)\left(\frac{e^{-4\pi i n}}{(ci+d)^2}\right)^{\frac{pq}{r}}.$$

ここで $\arg(ci+d) \in [-\pi, \pi)$ とし，$\widetilde{\mathbb{C}^\times}$ 内で pq/r 乗してから，$\mathbb{C}^\times$ へ射影している（ここで用いている有理数重さの保型形式は，Milnor [Mil75] を参照している）．このとき，この写像が 1 次ホモロジー群の同型

$$\mathbb{Z} \cong H_1(G_r\backslash\widetilde{\mathrm{SL}_2}(\mathbb{R}); \mathbb{Z}) \xrightarrow[\sim]{(\omega_\infty)_*} H_1(\mathbb{C}^\times; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

を誘導することを示せるので，絡み数は，次のように回転数としても与えられる．

$$\mathrm{Lk}_{S^3}(C_\gamma^{(\ell)}, K_{p,q}) = \mathrm{Ind}(\omega_\infty(C_\gamma^{(\ell)}), 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega_\infty(C_\gamma^{(\ell)})} \frac{dz}{z}.$$

写像 ω_∞ と $\Delta_{p,q}$ の定義，およびいくつかの計算を合わせると，これは

$$\mathrm{Lk}_{S^3}(C_\gamma^{(\ell)}, K_{p,q}) = \frac{r}{\gcd(\psi_{p,q}(\gamma), r)}\int_{z_0}^{\gamma z_0} E_2^{(p,q),*}(z)dz$$

と変形される．ここで積分路は γ の固定点 w_γ, w'_γ を結ぶ $\mathbb{H}$ 上の測地線上の線分である．このような測地線分上のモジュラー形式の積分は**サイクル積分**と呼ばれ，近年広く研究されている対象である．あとは，(2.2) における $\psi_{p,q}(\gamma)$ の定義から，

$$\int_{z_0}^{\gamma z_0} E_2^{(p,q),*}(z)dz = \frac{1}{r}\psi_{p,q}(\gamma) \tag{2.3}$$

が得られるという仕組みである． □

注意 2.14. 上記のサイクル積分表示 (2.3) は，双曲元 $\gamma \in \Gamma_{p,q}$ に対し Rademacher 記号 $\psi_{p,q}(\gamma)$ のひとつの定義を与えるが，この表示からは $\psi_{p,q}(\gamma)$ が整数になることは非自明である．

最後にタイトルにある 2-コサイクルについて，一言だけ述べておく．定義 2.3 の 2-コサイクル W は，非自明なコホモロジー類 $[W] \in H^2(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}); \mathbb{Z})$ を定める．一方で，$\Gamma_{p,q} \cong \mathbb{Z}/2p\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2q\mathbb{Z}$ であることから，$H^2(\Gamma_{p,q}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2pq\mathbb{Z}$ であることが確認できるので，ある関数 $f : \Gamma_{p,q} \to \mathbb{Z}$ が存在して，

$$2pqW(\gamma_1, \gamma_2) = f(\gamma_1\gamma_2) - f(\gamma_1) - f(\gamma_2)$$

が任意の $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_{p,q}$ に対して成り立つはずである．さらに $H^1(\Gamma_{p,q}; \mathbb{Z}) = \{0\}$ であることから，そのような関数 f は一意的であるのだが，それがまさに Rademacher 記号で与えられるのである．

定理 2.15. 任意の $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_{p,q}$ に対し，

$$2pqW(\gamma_1, \gamma_2) = \psi_{p,q}(\gamma_1\gamma_2) - \psi_{p,q}(\gamma_1) - \psi_{p,q}(\gamma_2)$$

が成り立つ．さらに, 生成元での値 $\psi_{p,q}(S_p) = -q, \psi_{p,q}(U_q) = -p$ と合わせることで, 帰納的に $\psi_{p,q}(\gamma)$ の値を計算することができる．

参考文献

[Asa70] Tetsuya Asai, *On a certain function analogous to* $\log|\eta(z)|$, Nagoya Math. J. **40** (1970), 193–211. MR 271038

[Ati87] Michael Atiyah, *The logarithm of the Dedekind η-function*, Math. Ann. **278** (1987), no. 1-4, 335–380. MR 909232

[BFOR17] Kathrin Bringmann, Amanda Folsom, Ken Ono, and Larry Rolen, *Harmonic Maass forms and mock modular forms: theory and applications*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 64, American Mathematical Society, Providence, RI, 2017. MR 3729259

[BG92] J. Barge and É. Ghys, *Cocycles d'Euler et de Maslov*, Math. Ann. **294** (1992), no. 2, 235–265. MR 1183404

[BW83] Joan S. Birman and R. F. Williams, *Knotted periodic orbits in dynamical systems. I. Lorenz's equations*, Topology **22** (1983), no. 1, 47–82. MR 682059

[DIT17] W. Duke, Ö. Imamoḡlu, and Á. Tóth, *Modular cocycles and linking numbers*, Duke Math. J. **166** (2017), no. 6, 1179–1210. MR 3635902

[Ghy06] Étienne Ghys, *Knots and dynamics*, ICM Madrid Videos 24.08.2006, `https://www.mathunion.org/icm/icm-videos/icm-2006-videos-madrid-spain/icm-madrid-videos-24082006`, 2006.

[Ghy07] ———, *Knots and dynamics*, International Congress of Mathematicians. Vol. I, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007, pp. 247–277. MR 2334193

[GL06] Étienne Ghys and Jos Leys, *Lorenz and modular flows: a visual introduction*, `http://www.josleys.com/articles/ams_article/Lorenz3.htm#_edn5`, 2006.

[Iwa02] Henryk Iwaniec, *Spectral methods of automorphic forms*, second ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 53, American Mathematical Society, Providence, RI; Revista Matemática Iberoamericana, Madrid, 2002. MR 1942691

[Mil71] John Milnor, *Introduction to algebraic K-theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1971, Annals of Mathematics Studies, No. 72. MR 0349811

[Mil75] ———, *On the* 3*-dimensional Brieskorn manifolds* $M(p,q,r)$, Knots, groups, and 3-manifolds (Papers dedicated to the memory of R. H. Fox), 1975, pp. 175–225. Ann. of Math. Studies, No. 84. MR 0418127

[MOS66] Wilhelm Magnus, Fritz Oberhettinger, and Raj Pal Soni, *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics*, Third enlarged edition. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 52, Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966. MR 0232968

[RG72] Hans Rademacher and Emil Grosswald, *Dedekind sums*, The Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1972, The Carus Mathematical Monographs, No. 16. MR 0357299

[RV81] Frank Raymond and Alphonse T. Vasquez, 3*-manifolds whose universal coverings are Lie groups*, Topology Appl. **12** (1981), no. 2, 161–179. MR 612013

[Ser03] Jean-Pierre Serre, *Trees*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003, Translated from the French original by John Stillwell, Corrected 2nd printing of the 1980 English translation. MR 1954121

[ST80] Herbert Seifert and William Threlfall, *Seifert and Threlfall: a textbook of topology*, Pure and Applied Mathematics, vol. 89, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1980, Translated from the German edition of 1934 by Michael A. Goldman, With a preface by Joan S. Birman, With “Topology of 3-dimensional fibered spaces” by Seifert, Translated from the German by Wolfgang Heil. MR 575168

[Tsa13] Valdemar V. Tsanov, *Triangle groups, automorphic forms, and torus knots*, Enseign. Math. (2) **59** (2013), no. 1-2, 73–113. MR 3113600