

Arrow diagrams on spherical curves and computations

高村 正志 (青山学院大学 社会情報学部)

伊藤昇氏 (東京大学大学院数理科学研究科) との共同研究

研究集会「結び目の数学 X」

2017 年 12 月 25 日

東京女子大学 24 号館 (安井てつ記念ホール)

★ コード図のリストを作る

- 球面曲線からコード図がつくられる.
- Gauss word の同型類とコード図 が 1 対 1 対応する.
- Gauss word で, 左から読んでいき, 最初の letter は 1, 新しく現れた letter は今まで出現した letter の最大値 +1 をみたすものを正規 Gauss word という.
- 次の様な Gauss word を 正規 (normal) という.

121233, 1234255143

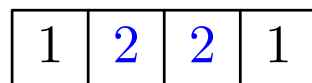
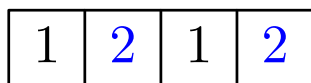
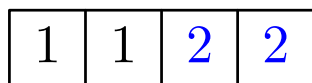
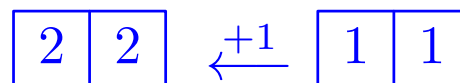
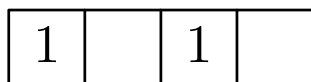
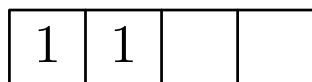
- 次の Gauss word は正規でない.

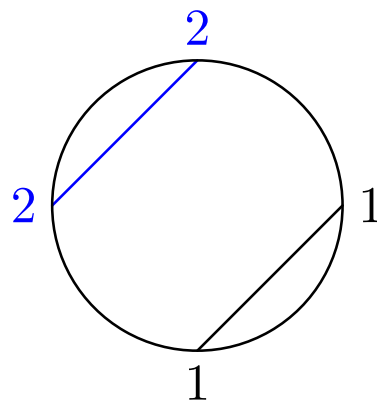
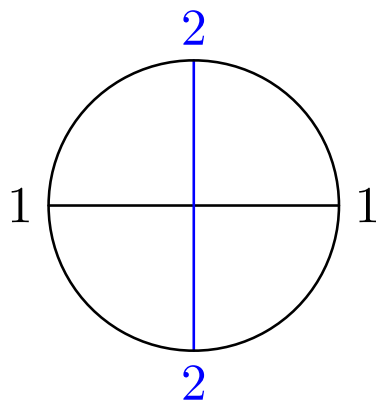
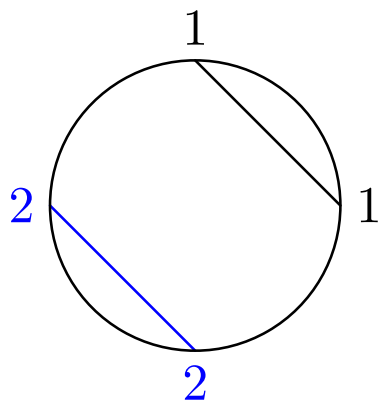
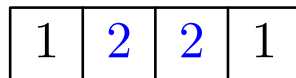
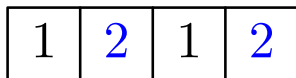
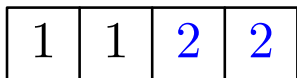
131322, 2342551431

★ 長さ $2n$ の正規 Gauss word の全てリストを作る

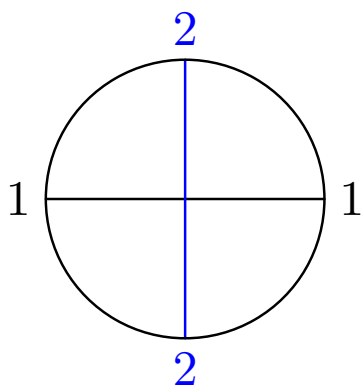
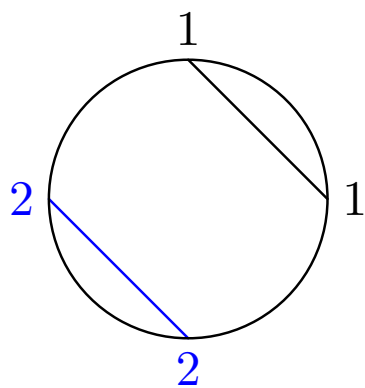
- 長さ 2 の正規 Gauss word は 11 のみ.
- 長さ $2(n - 1)$ の正規 Gauss word のリストは完成していると仮定する.
- 長さ $2n$ の正規 Gauss word をリストを作る.
 - 長さ $2n$ の配列を用意する.
 - 2 番目の 1 の場所を決める.
 - 残った場所に長さ $2(n - 1)$ の正規 Gauss word を 1 シフトしたも

のを埋め込む.





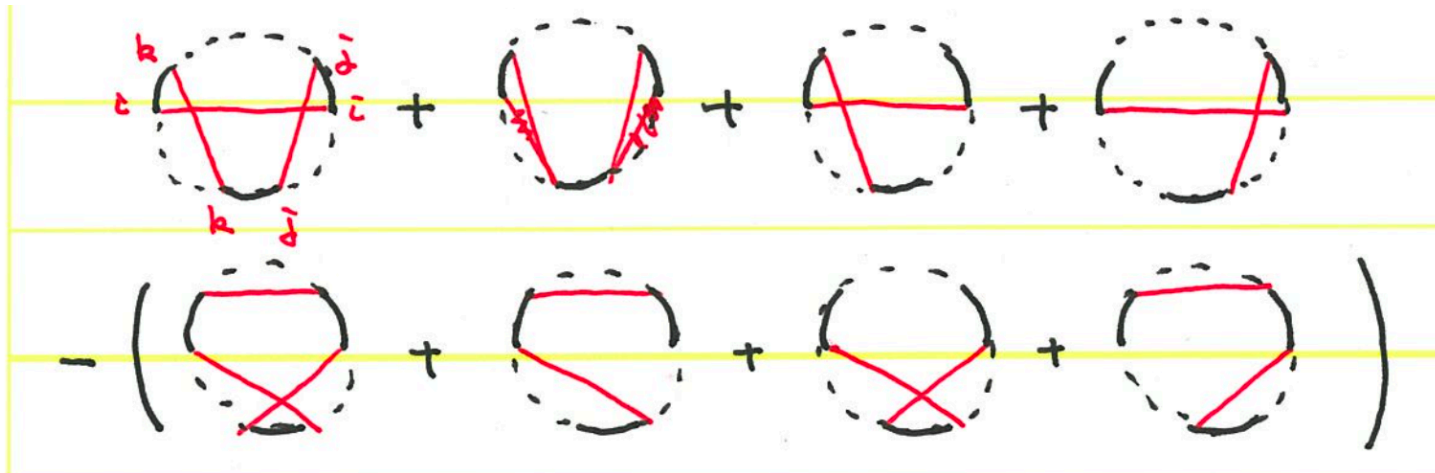
- 回転と鏡映による同一視をすると，コード図のリストが完成する.



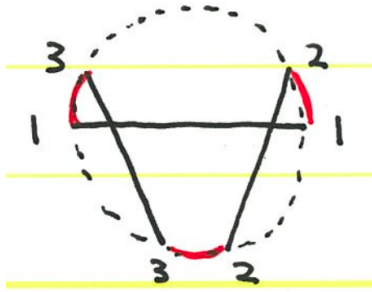
★ order n の weak RIII relator のリストを作る

- order n の weak RIII relator

$$\begin{aligned}
 & [S_{ij}T_{ki}U_{kj}] + [S_{jT}kU_{kj}] + [S_{iT}kiU_k] + [S_{ij}T_iU_j] \\
 & - ([S_{ji}T_{ik}U_{kj}] + [S_{ji}T_iU_j] + [S_{iT}ikU_k] + [S_{jT}kU_{kj}]) \\
 = & [S_{ij}T_{ki}U_{kj}] + [S_{jT}kU_{kj}] + [S_{iT}kiU_k] + [S_{ij}T_iU_j] \\
 & - ([S_{ij}T_{jk}U_{ik}] + [S_{jT}jkU_k] + [S_{iT}kU_{ik}] + [S_{ij}T_jU_i])
 \end{aligned}$$

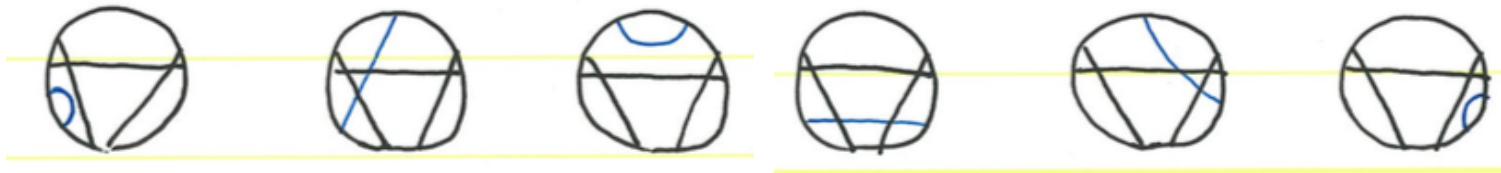


- 基本となるコード図にコードを追加していく。

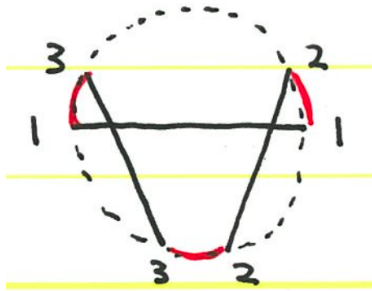


ただし、赤い所にはコードが入ってはいけない。

- $n = 4$ のとき ... コードの入れ方は 6 種類

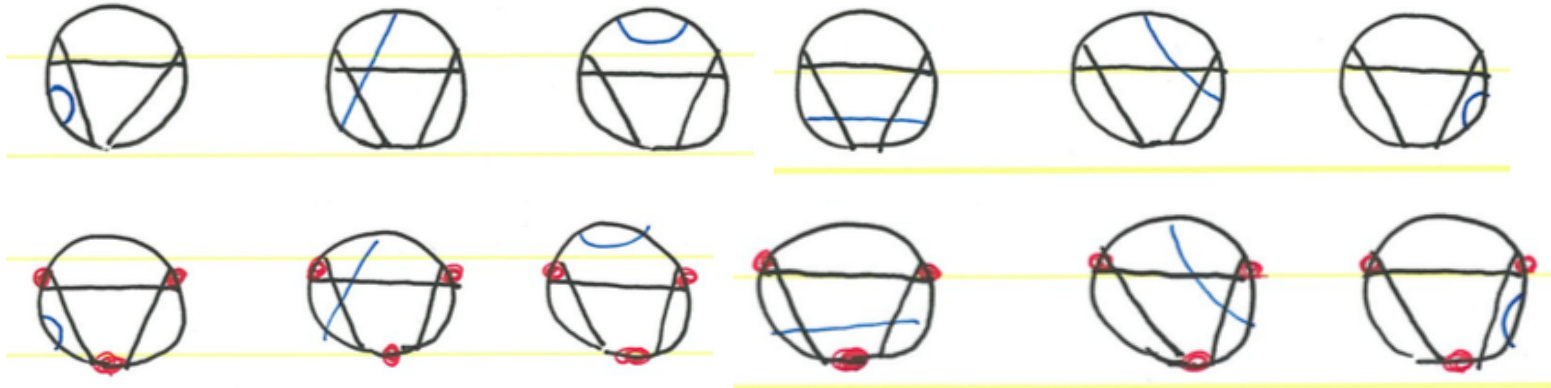


- 基本となるコード図にコードを追加していく。

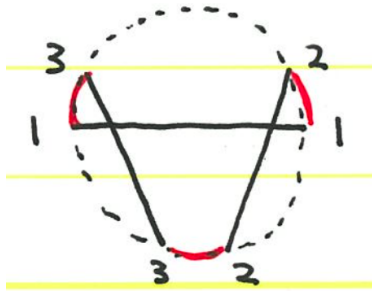


ただし、赤い所にはコードが入ってはいけない。

- $n = 4$ のとき ... コードの入れ方は 6 種類

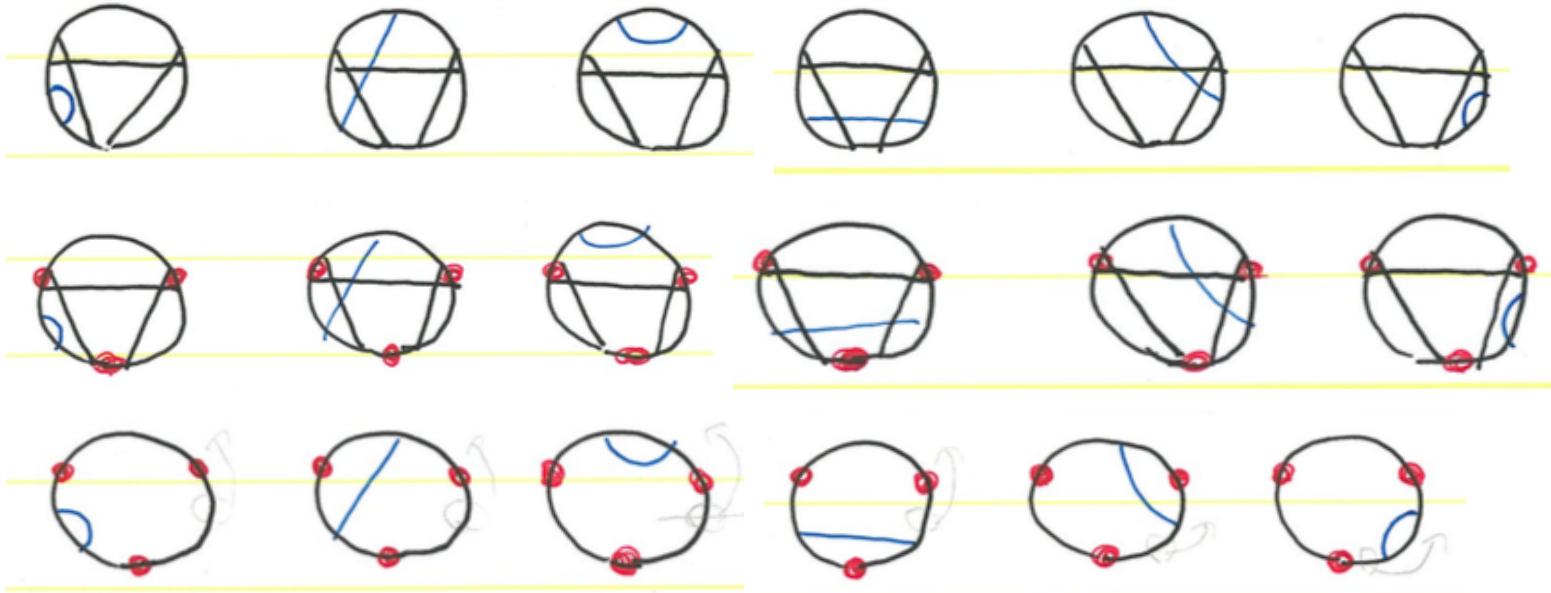


- 基本となるコード図にコードを追加していく。

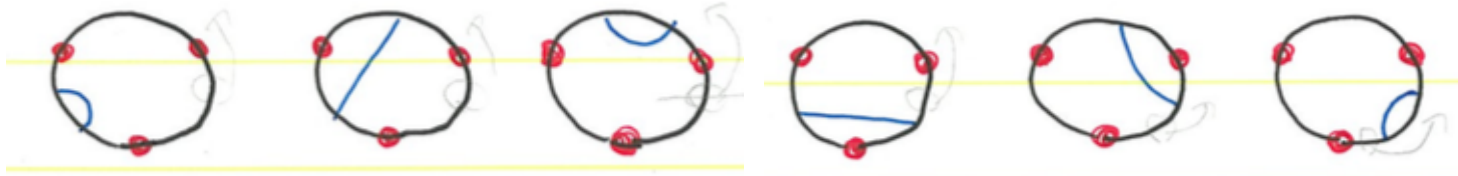


ただし、赤い所にはコードが入ってはいけない。

- $n = 4$ のとき ... コードの入れ方は 6 種類



- order $1 = 4 - 3$ のガウスワード **11** に 3 つの ● を入れる.



- 回転による同一視があるので, 最後が ● のときのみを考えればいい.

●●11● ●1●1● ●11●● 1●●1● 1●1●● 11●●●

- 一般の n の場合

- order $n - 3$ の正規ガウスワードのリストは出来ているとする。

- $2(n - 3) + 3$ の配列の配列を用意して, ● の入り方のリストを作る。



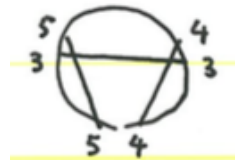
プログラムでは ● は -1 で代用。

- 出来た配列の ● を 2 倍にする。例えば $n = 5$ で



- 6 個の「●」の所には, 基本となるコード図 (ガウスワード) **123132** を

シフトした $n - 2$ $n - 1$ n $n - 2$ n $n - 1$ を入れる。

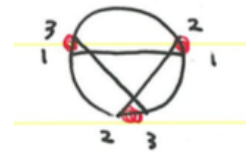


$n = 5$ のとき, **345354**

- 空白「 」のところには, order $n - 3$ の正規ガウスワードを入れる。

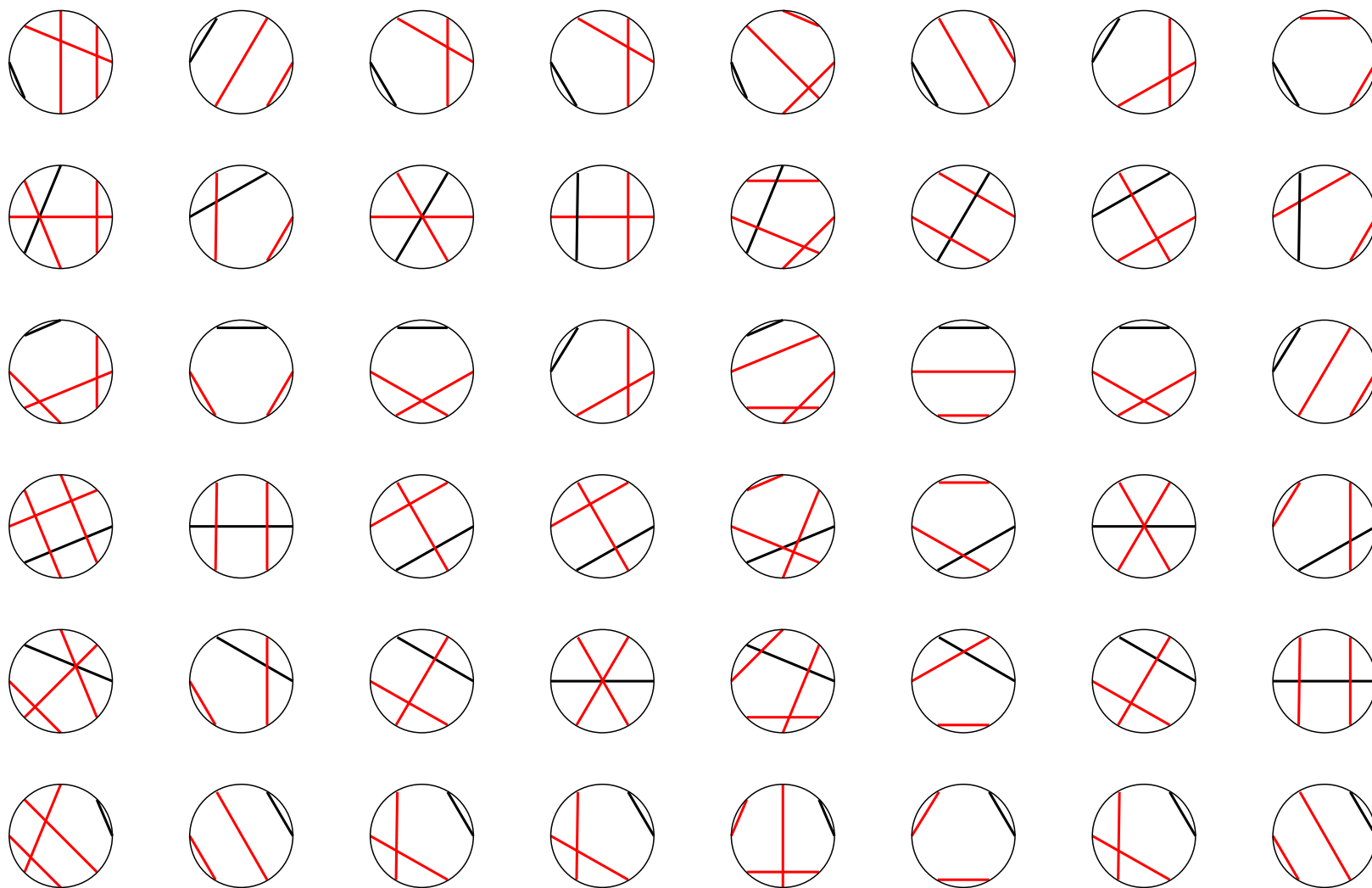
○ 正規化する.

- この作り方で 123132 に $n - 3$ 本のコードを入れたものの全てのリストが出来た.
- 回転と鏡像で一致するものを除いて, move すれば order n の weak RIII relator のリストができる.



- 注. strong の場合も基本となるコードダイアグラムを 123123 に変えればよい.
- 注. wRII, sRII の場合は, 2 個の ● の入れ方を考えれば良い.

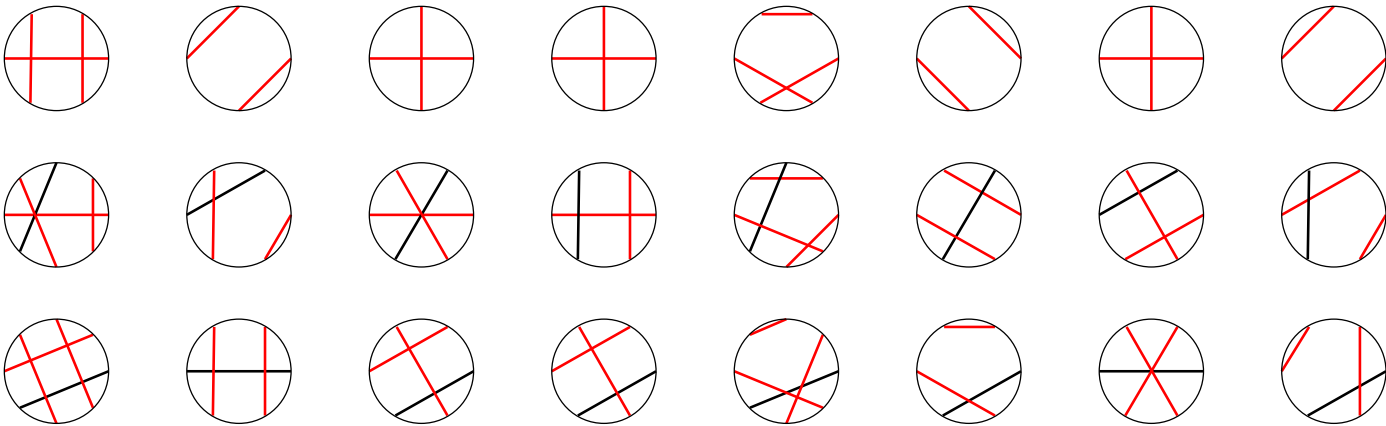
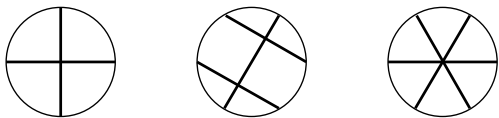
● $n = 4$ の場合



● $R_{00010}(2, 3)$ の場合 (weak)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$V_w(2, 3) := \{x \mid xA = 0\}, \quad \dim V_w(2, 3) = 0$$



● $R_{00010}(3, 4)$ の場合 (weak)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_w(3, 4) := \{x \mid xA = 0\}, \quad \dim V_w(3, 4) = 0$$

● 計算結果

b	2	3	4	5	6
$\dim V_w(b, b + 1)$	0	0	0	0	?
$\dim V_s(b, b + 1)$	1	1	1	1	?

★ 長さ $2n$ の向き付き正規 Gauss word の全てリストを作る

- n 本のコードの向きのリストを作る.

- $n = 1$ のとき, \rightarrow , \leftarrow の 2 通り

プログラム上では \rightarrow を $\{0, 1\}$, \leftarrow を $\{1, 0\}$ で表す.

図上では \rightarrow を $-●$, \leftarrow を $●-$ で表す.

- $n = k$ のとき,

$\rightarrow \times (k - 1)$ の時のリスト, $\leftarrow \times (k - 1)$ の時のリスト

の 2^k 通り

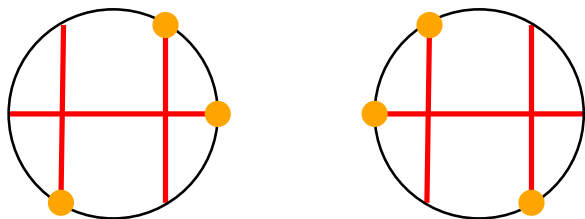
- $w = \{1, 2, 3, 1, 3, 2\}$, $\text{ori} = \{\{1, 0\}, \{0, 1\}, \{1, 0\}\}$ のとき,
 $\text{orientation_list} = \{1, 0, 1, 0, 0, 1\}$ と展開する. $w = \bar{1}2\bar{3}13\bar{2}$

★ 長さ $2n$ の Arrow Diagram の全てリストを作る

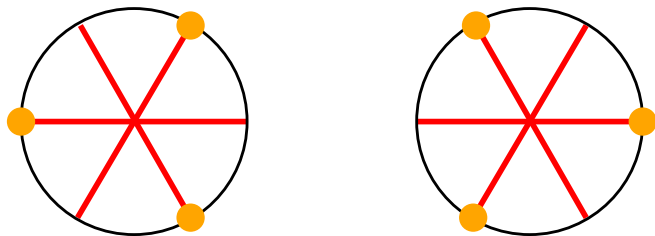
- 向き付き正規 Gauss word に回転で, letter の配列と orientation の配列が一致しているかのチェック
- Arrow diagram のリストが完成!!

★ order n の oriented w/s RIII relator のリストを作る

- weak の場合の基本となる Arrow Diagram



- strong の場合の基本となる Arrow Diagram



- 計算結果

b	2	3	4	5	6
$\dim V_w(b, b + 1)$	0	0	0	0	?
$\dim V_s(b, b + 1)$	1	1	1	1	?
$\dim V_w^{\text{ori}}(b, b + 1)$	1	3	13	?	?
$\dim V_s^{\text{ori}}(b, b + 1)$	3	18	145	?	?