

種数 0 の Lefschetz ファイバー空間の符号数について

宮村 旭

東京工業大学博士後期課程 1 年

December 25, 2017

- 1 準備
- 2 主結果
- 3 先行研究との関連

本講演では断りのない限り、多様体は連結、コンパクト、滑らかで向き付けられているとする。

符号数

$M : 2n$ 次元多様体、 $[M] \in H_{2n}(M, \partial M; \mathbb{Z}) : M$ の基本類とする。

符号数

$M : 2n$ 次元多様体、 $[M] \in H_{2n}(M, \partial M; \mathbb{Z}) : M$ の基本類とする。

定義 1.1

$$Q_M : H^n(M, \partial M; \mathbb{Z}) \times H^n(M, \partial M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$Q_M(\alpha, \beta) = \langle \alpha \cup \beta, [M] \rangle$$

を M の交叉形式と呼ぶ。

符号数

$M : 2n$ 次元多様体、 $[M] \in H_{2n}(M, \partial M; \mathbb{Z}) : M$ の基本類とする。

定義 1.1

$$Q_M : H^n(M, \partial M; \mathbb{Z}) \times H^n(M, \partial M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$Q_M(\alpha, \beta) = \langle \alpha \cup \beta, [M] \rangle$$

を M の交叉形式と呼ぶ。

\rightsquigarrow Poincaré 双対 (or Lefschetz 双対) により、 Q_M は $H_n(M, ; \mathbb{Z})$ 上の双線形形式と見なせる。

符号数

$M : 2n$ 次元多様体、 $[M] \in H_{2n}(M, \partial M; \mathbb{Z}) : M$ の基本類とする。

定義 1.1

$$Q_M : H^n(M, \partial M; \mathbb{Z}) \times H^n(M, \partial M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$Q_M(\alpha, \beta) = \langle \alpha \cup \beta, [M] \rangle$$

を M の交叉形式と呼ぶ。

\rightsquigarrow Poincaré 双対 (or Lefschetz 双対) により、 Q_M は $H_n(M, ; \mathbb{Z})$ 上の双線形形式と見なせる。

Remark 1.2

$M : 4n$ 次元多様体 $\Rightarrow Q_M$ は対称である。

符号数

M : 4次元多様体、 $b_2^{+(resp.-,0)}(M) : Q_M$ の正 (resp. 負,0) の固有値の重複度を込めた個数

符号数

M : 4次元多様体、 $b_2^{+(\text{resp.}-,0)}(M)$: Q_M の正 (resp. 負,0) の固有値の重複度を込めた個数

定義 1.3

M : 4次元多様体に対して、 Q_M の符号数 ($= b_2^+(M) - b_2^-(M)$) を M の符号数と呼び、 $\sigma(M)$ と書く。

Remark 1.4

- $b_2(M) = b_2^+(M) + b_2^-(M) + b_2^0(M)$ となる。
- 符号数は位相不変量

Lefschetz ファイバー空間

$M : 4$ 次元多様体、 $B : 2$ 次元多様体、 $f : M \rightarrow B$ を滑らかな全射

Lefschetz ファイバー空間

M : 4次元多様体、 B : 2次元多様体、 $f : M \rightarrow B$ を滑らかな全射

定義 1.5

f が次の 2つを満たすとき、 f を *Lefschetz ファイバー空間* と呼ぶ。

- ① $\{b_1, \dots, b_m\} \subset \text{Int} B$ を f の臨界値集合としたとき、各 b_i に対し $f^{-1}(b_i)$ はただ一つの臨界点 p_i を持つ
- ② 各 i に対し、 b_i, p_i の、 B, M の向きと両立する局所複素可微分座標近傍 $(U, w), (V, (z_1, z_2))$ が存在し、 V 上で $f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$ となる

Lefschetz ファイバー空間

M : 4次元多様体、 B : 2次元多様体、 $f : M \rightarrow B$ を滑らかな全射

定義 1.5

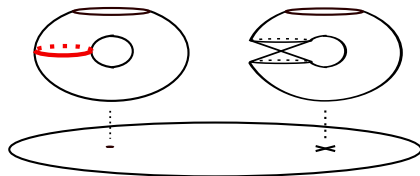
f が次の 2つを満たすとき、 f を *Lefschetz* ファイバー空間と呼ぶ。

- ① $\{b_1, \dots, b_m\} \subset \text{Int} B$ を f の臨界値集合としたとき、各 b_i に対し $f^{-1}(b_i)$ はただ一つの臨界点 p_i を持つ
- ② 各 i に対し、 b_i, p_i の、 B, M の向きと両立する局所複素可微分座標近傍 $(U, w), (V, (z_1, z_2))$ が存在し、 V 上で $f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$ となる

Remark 1.6

$b_0 \in B - \{b_1, \dots, b_m\}$ に対して $f^{-1}(b_0)$ はコンパクト有向曲面になる。 $f^{-1}(b_0)$ を一般ファイバー、 $f^{-1}(b_i) (1 \leq i \leq m)$ を特異ファイバーと呼ぶ。

Lefschetz ファイバー空間



Remark 1.7

$f|_{M-f^{-1}(\{b_1, \dots, b_m\})}: M - f^{-1}(\{b_1, \dots, b_m\}) \rightarrow B - \{b_1, \dots, b_m\}$
 はファイバーを $f^{-1}(b_0)$ とするファイバー束となる。各臨界値 $b_i (i \neq 0)$ 周りのモノドロミーは $\text{Int } f^{-1}(b_0)$ 内の消滅サイクルと呼ばれる閉曲線 γ_i に沿った Dehn ツイストとなることが知られている。

主結果

$r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし、 Σ を種数 0、境界成分 $r+1$ のコンパクト有向曲面とする。 $f: M \rightarrow D^2$ を Σ を一般ファイバーとし、 $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \text{Int}\Sigma$ を消滅サイクルに持つ Lefschetz ファイバー空間とする。

主結果

$r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし、 Σ を種数 0、境界成分 $r+1$ のコンパクト有向曲面とする。 $f: M \rightarrow D^2$ を Σ を一般ファイバーとし、 $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \text{Int}\Sigma$ を消滅サイクルに持つ Lefschetz ファイバー空間とする。

定理 2.1 (M.)

$$\sigma(M) = -m + \dim \langle \gamma_1, \dots, \gamma_m \rangle$$

ここで、 γ_i は閉曲線 γ_i の代表するホモロジー類を表しており、 $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_m \rangle$ は $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ によって生成される $H_1(\Sigma; \mathbb{R})$ の部分空間である。

主結果

$r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし、 Σ を種数 0、境界成分 $r+1$ のコンパクト有向曲面とする。 $f: M \rightarrow D^2$ を Σ を一般ファイバーとし、 $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \text{Int}\Sigma$ を消滅サイクルに持つ Lefschetz ファイバー空間とする。

定理 2.1 (M.)

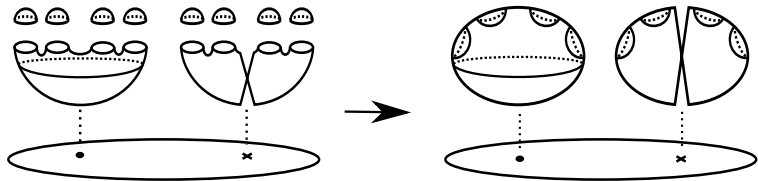
$$\sigma(M) = -m + \dim \langle \gamma_1, \dots, \gamma_m \rangle$$

ここで、 γ_i は閉曲線 γ_i の代表するホモロジー類を表しており、 $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_m \rangle$ は $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ によって生成される $H_1(\Sigma; \mathbb{R})$ の部分空間である。

系 2.2 (M.)

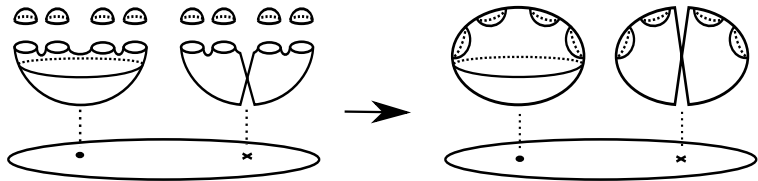
上と同じ状況において $\sigma(M) = -m + r - b_1(M)$ となる。

方針: 全てのファイバー (特異ファイバーを含む) の境界に D^2 を貼って簡単な形にする & Wall の公式



M と $(\prod_{i=0}^r D_i^2) \times D^2$ を貼り合わせる

方針: 全てのファイバー (特異ファイバーを含む) の境界に D^2 を貼って簡単な形にする & Wall の公式



M と $(\prod_{i=0}^r D_i^2) \times D^2$ を貼り合わせる $\rightsquigarrow D^2 \times S^2 \# m \overline{\mathbb{C}P^2}$ と微分同相となる。特に、符号数は $-m$ になる。

貼り合わせによる符号数の変化は、Wall の公式により、Maslov 指数と一致する。

貼り合わせによる符号数の変化は、Wall の公式により、Maslov 指数と一致する。

Y, Y_{\pm} : 4次元多様体, X_0, X_{\pm} : 3次元多様体, Z : 閉曲面 s.t.

$$Y = Y_+ \cup Y_-, \partial Y_{\pm} = X_0 \cup X_{\pm}, \partial X_{\pm} = \partial X_0 = Z$$

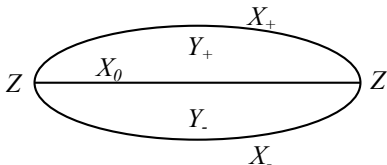
$$[Y] = [Y_+] - [Y_-], \partial_*[Y_{\pm}] = \pm([X_{\pm}] - [X_0]), \partial_*[X_{\pm}] = \partial_*[X_0] = [Z]$$

貼り合わせによる符号数の変化は、Wall の公式により、Maslov 指数と一致する。

Y, Y_{\pm} : 4次元多様体, X_0, X_{\pm} : 3次元多様体, Z : 閉曲面 s.t.

$$Y = Y_+ \cup Y_-, \partial Y_{\pm} = X_0 \cup X_{\pm}, \partial X_{\pm} = \partial X_0 = Z$$

$$[Y] = [Y_+] - [Y_-], \partial_*[Y_{\pm}] = \pm([X_{\pm}] - [X_0]), \partial_*[X_{\pm}] = \partial_*[X_0] = [Z]$$

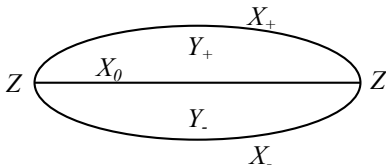


貼り合わせによる符号数の変化は、Wall の公式により、Maslov 指数と一致する。

Y, Y_{\pm} : 4次元多様体, X_0, X_{\pm} : 3次元多様体, Z : 閉曲面 s.t.

$$Y = Y_+ \cup Y_-, \partial Y_{\pm} = X_0 \cup X_{\pm}, \partial X_{\pm} = \partial X_0 = Z$$

$$[Y] = [Y_+] - [Y_-], \partial_*[Y_{\pm}] = \pm([X_{\pm}] - [X_0]), \partial_*[X_{\pm}] = \partial_*[X_0] = [Z]$$



定理 2.3 (Wall, '69)

$\sigma(Y) = \sigma(Y_+) + \sigma(Y_-) - \sigma(W, \Psi)$, $\sigma(W, \Psi)$: Maslov 指数

W は Z から X_0, X_{\pm} への包含写像が誘導する \mathbb{R} 係数 1 次ホモロジー群の間の準同形の核によって定まるベクトル空間であり、

$\sigma(W, \Psi)$ は Q_Z から定まる W 上の対称双線形形式 Ψ の符号数である。

証明の概要:

証明の概要:

$f : Y_+ \rightarrow D^2$: Lefschetz ファイバー空間,

$\Sigma_{0,r+1} : f$ の一般ファイバー,

$\gamma_1, \dots, \gamma_m : f$ の消滅サイクル,

$$Y_- = \left(\prod_{i=0}^r D_i^2 \right) \times D^2 \quad (D_i^2 = D^2)$$

として Wall の公式を適用すると

証明の概要:

$f : Y_+ \rightarrow D^2$: Lefschetz ファイバー空間,

$\Sigma_{0,r+1} : f$ の一般ファイバー,

$\gamma_1, \dots, \gamma_m : f$ の消滅サイクル,

$Y_- = (\coprod_{i=0}^r D_i^2) \times D^2$ ($D_i^2 = D^2$)

として Wall の公式を適用すると

$$-m = \sigma(D^2 \times S^2 \# m \overline{\mathbb{C}P^2}) = \sigma(Y_+ \cup Y_-) = \sigma(Y_+) - \sigma(W, \Psi)$$

となる。

証明の概要:

$f: Y_+ \rightarrow D^2$: Lefschetz ファイバー空間,

$\Sigma_{0,r+1}$: f の一般ファイバー,

$\gamma_1, \dots, \gamma_m$: f の消滅サイクル,

$Y_- = (\coprod_{i=0}^r D_i^2) \times D^2$ ($D_i^2 = D^2$)

として Wall の公式を適用すると

$$-m = \sigma(D^2 \times S^2 \# m\overline{\mathbb{C}P^2}) = \sigma(Y_+ \cup Y_-) = \sigma(Y_+) - \sigma(W, \Psi)$$

となる。

命題 2.4 (M.)

Ψ は正定値となる。

命題 2.5 (M.)

$\dim W = \dim \langle \gamma_1, \dots, \gamma_m \rangle$ となる。

主結果は次の結果と関連がある。

定理 3.1 (Etnyre, 2002)

種数 0 のオープンブック分解に対応する接触多様体のシンプレクティック充填は負定値な交叉形式を持つ。

主結果は次の結果と関連がある。

定理 3.1 (Etnyre, 2002)

種数 0 のオープンブック分解に対応する接触多様体のシンプレクティック充填は負定値な交叉形式を持つ。

主結果と以下の二つを組み合わせることにより定理 3.1 を示すことができる。

主結果は次の結果と関連がある。

定理 3.1 (Etnyre, 2002)

種数 0 のオープンブック分解に対応する接触多様体のシンプレクティック充填は負定値な交叉形式を持つ。

主結果と以下の二つを組み合わせることにより定理 3.1 を示すことができる。

定理 3.2 (Niederkrüger-Wendl, 2011)

種数 0 のオープンブック分解に対応する接触多様体のシンプレクティック充填は *Stein* 充填のブローアップにより得られる。

定理 3.3 (Wendl, 2010)

種数 0 のオープンブック分解に対応する接触多様体の *Stein* 充填はオープンブック分解と両立する *Lefschetz* ファイバー空間の構造を持つ。

定理 3.1 の証明.

M' : 定理 3.1 のシンプレクティック充填

$\rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, M$: Stein 充填 s.t. $M' = M \# k \overline{\mathbb{C}P^2}$ (\because 定理 3.2)

定理 3.1 の証明.

M' : 定理 3.1 のシンプレクティック充填

$\rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, M$: Stein 充填 s.t. $M' = M \# k \overline{\mathbb{C}P^2}$ (\because 定理 3.2)

\therefore 「 M : 負定値」を示せばいい ($\because M$: 負定値 $\Rightarrow M'$: 負定値)。

定理 3.1 の証明.

M' : 定理 3.1 のシンプレクティック充填

$\rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, M$: Stein 充填 s.t. $M' = M \# k \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ (\because 定理 3.2)

\therefore 「 M : 負定値」を示せばいい ($\because M$: 負定値 $\Rightarrow M'$: 負定値)。

一方で, M は種数 0 の D^2 上の Lefschetz ファイバー空間の構造を持つ (\because 定理 3.3)。

定理 3.1 の証明.

M' : 定理 3.1 のシンプレクティック充填

$\rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, M$: Stein 充填 s.t. $M' = M \# k \overline{\mathbb{C}P^2}$ (\because 定理 3.2)

\therefore 「 M : 負定値」を示せばいい ($\because M$: 負定値 $\Rightarrow M'$: 負定値)。

一方で, M は種数 0 の D^2 上の Lefschetz ファイバー空間の構造を持つ (\because 定理 3.3)。一般ファイバーの境界成分数を $r+1$ ($r \geq 0$)、消滅サイクルの個数を m とすると、系 2.2 より

$$b_2^+ - b_2^- = \sigma(M) = -m + r - b_1 \quad (1)$$

である。

定理 3.1 の証明.

M' : 定理 3.1 のシンプレクティック充填

$\rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, M$: Stein 充填 s.t. $M' = M \# k \overline{\mathbb{C}P^2}$ (\because 定理 3.2)

\therefore 「 M : 負定値」を示せばいい ($\because M$: 負定値 $\Rightarrow M'$: 負定値)。

一方で, M は種数 0 の D^2 上の Lefschetz ファイバー空間の構造を持つ (\because 定理 3.3)。一般ファイバーの境界成分数を $r+1$ ($r \geq 0$)、消滅サイクルの個数を m とすると、系 2.2 より

$$b_2^+ - b_2^- = \sigma(M) = -m + r - b_1 \quad (1)$$

である。Lefschetz ファイバー空間のハンドル分解から

$$1 - b_1 + b_2^+ + b_2^0 + b_2^- = \chi(M) = 1 - r + m \quad (2)$$

(1)+(2) から $2b_2^+ + b_2^0 = 0$ となり M は負定値と分かる。 □

終わり

Thank you for your attention.