

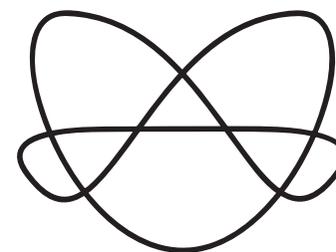
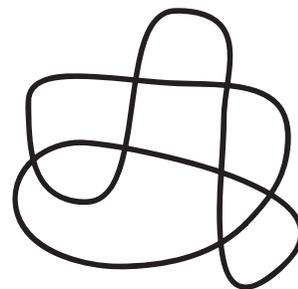
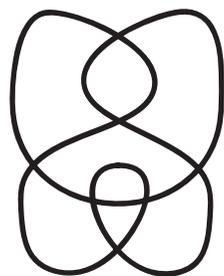
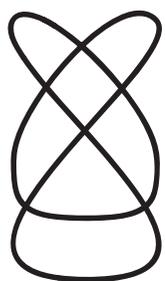
Spaces of chord diagrams of spherical curves

伊藤 昇 (東大数理)

‡ 本研究は科研費 (S)24224002 からの補助を受けました.

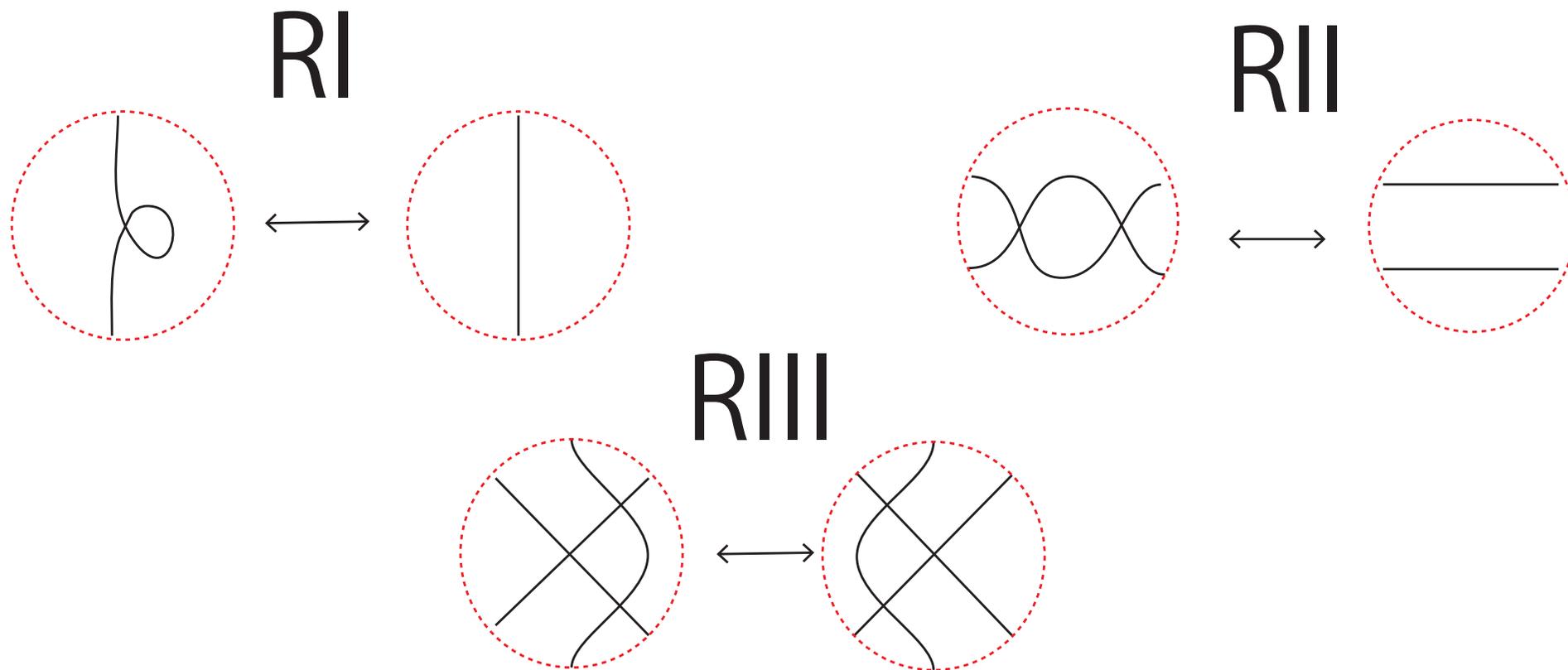
* スライドで図の一部を瀧村祐介氏 (学習院中等科) から頂きました.

球面曲線 (unoriented generic immersed spherical curve) を考える.

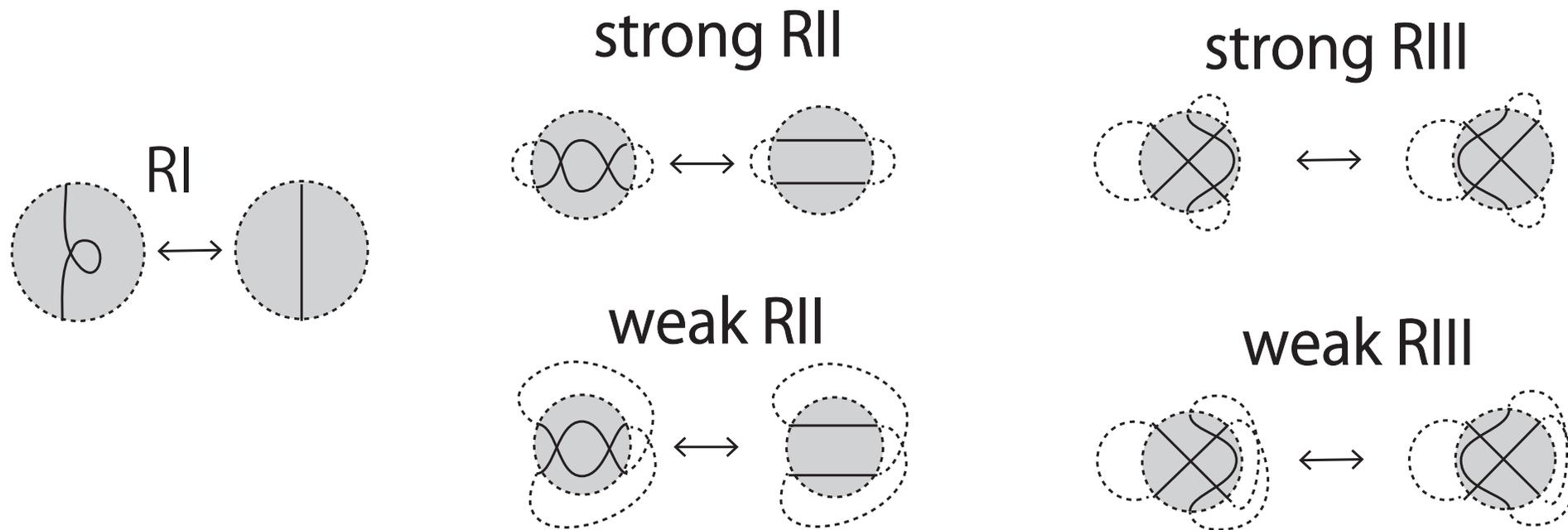


記号 P, P' は球面曲線を表す.

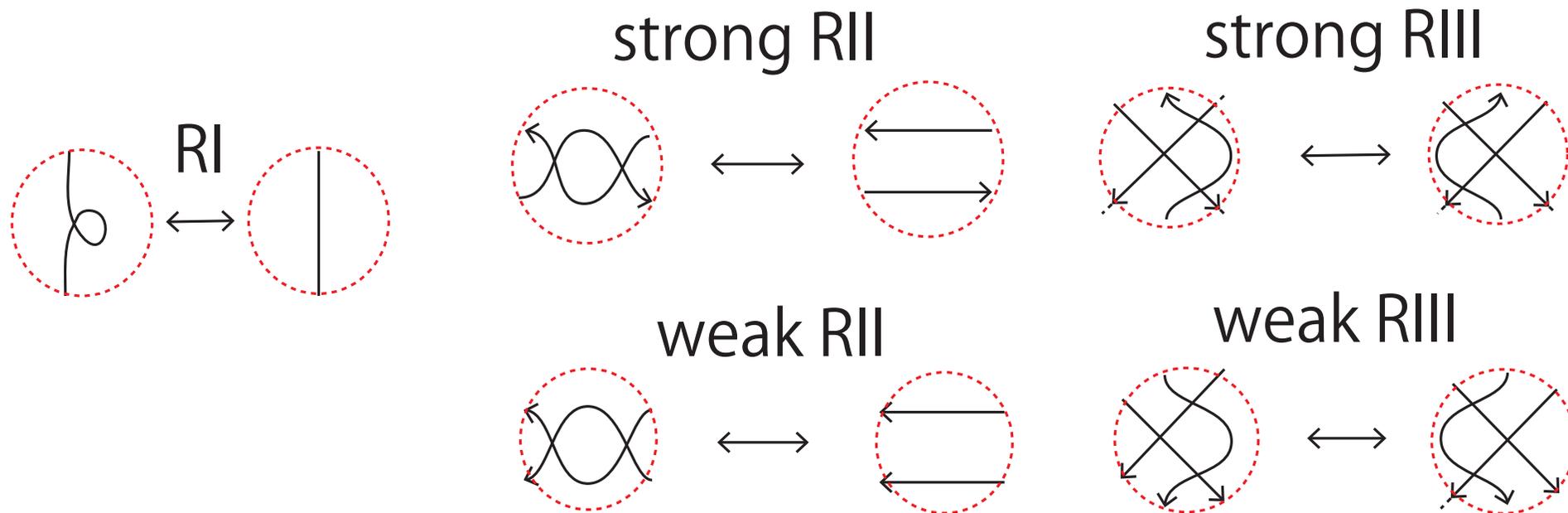
任意の2つの球面曲線は3種類のライデマイスター移動からなる有限列で移り合う。

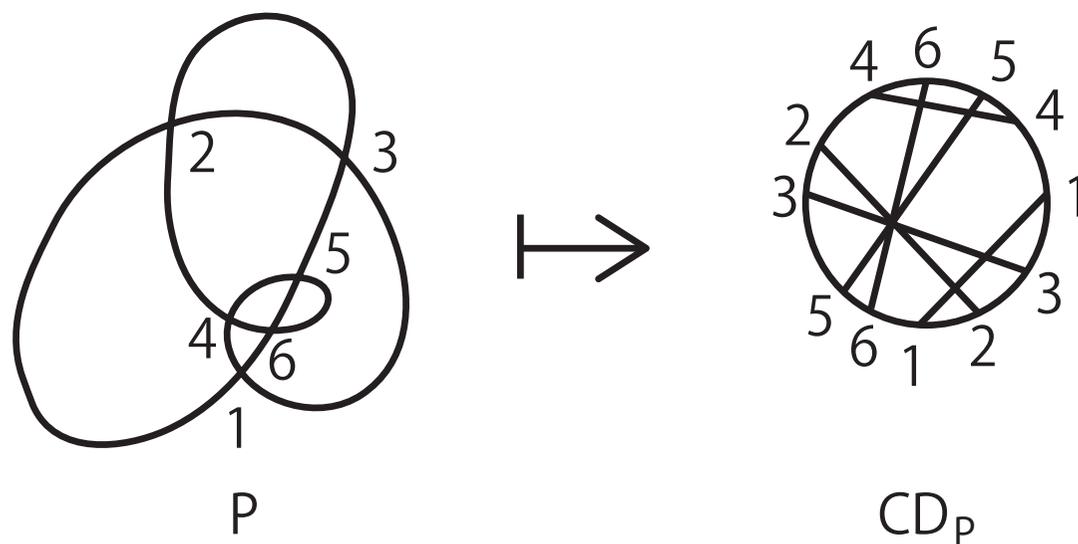


5種類のライデマイスター移動により、 2^5 通りの同値関係が考えられる。

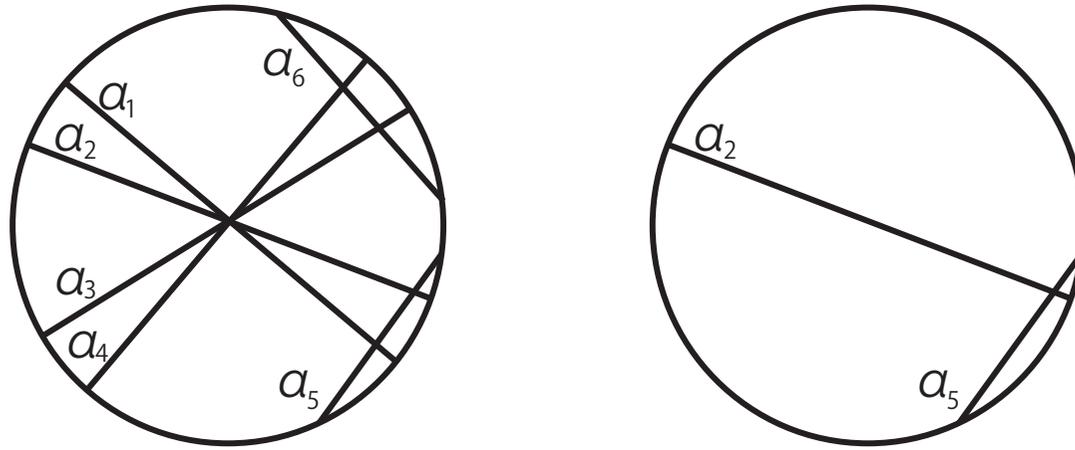


5種類のライデマイスター移動により、 2^5 通りの同値関係が考えられる。





- コード図 $\stackrel{\text{def}}{=} \text{円周上2個ずつペアとなる点配置}$.
- P のコード図 $CD_P \stackrel{\text{def}}{=} \text{2重点の逆像の配置}$.



- コード図 $\stackrel{\text{def}}{=} \text{円周上2個ずつペアとなる点配置}$.
部分コード図を数え上げる関数を定義するため、
コード図をワードによって再定義する.

部分コード図を数え上げる関数の定義 (1/5)

- 長さ n のワード $w : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{N}$.
- 表示 : $w(1)w(2) \cdots w(n)$.
- letter : w の像の元.
- 長さ $2n$ のガウスワード :
各 letter (n 個) がちょうど 2 回現れるワード.

部分コード図を数え上げる関数の定義 (2/5)

- 2つのガウスワード w, v が isomorphic

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists$ 全単射 $f : w(2\hat{n}) \rightarrow v(2\hat{n})$ s.t.

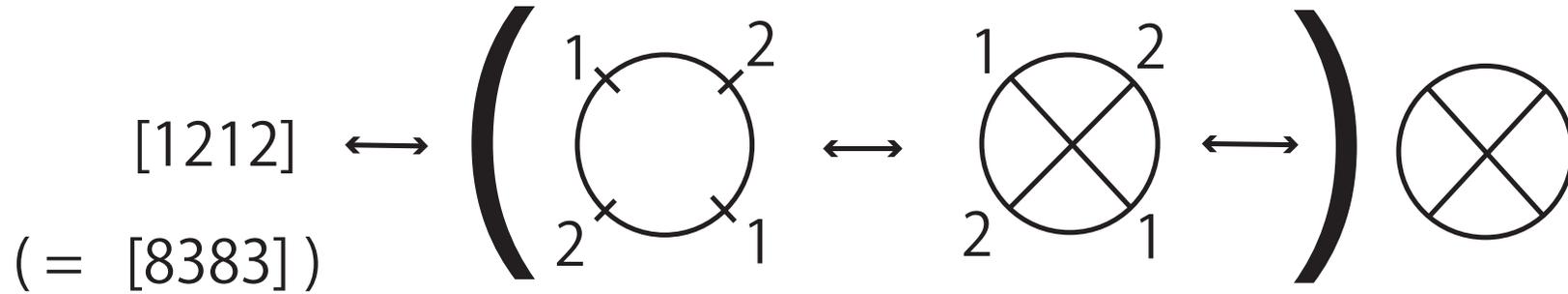
$\exists t \in \mathbb{Z}, \exists \epsilon \in \{0, 1\} (v \circ (\text{cyc})^t \circ (\text{rev})^\epsilon = f \circ w).$

ただし、

$$\text{cyc}(p) \equiv p+1 \pmod{2n}, \text{rev}(p) \equiv -p+1 \pmod{2n}$$

部分コード図を数え上げる関数の定義 (3/5)

下記の同一視を行う.



部分コード図を数え上げる関数の定義 (4/5)

- $G_{<\infty}$ = コード図全体からなる集合.
- $G_{<\infty}$ と $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ の間に全単射を固定.
- $G_{\leq d} = \{CD \in G_{<\infty}, \text{ at most } d \text{ chords} \}$
- $n_d = |G_{\leq d}|$, $G_{b,d} = G_{\leq d} \setminus G_{\leq b-1}$.
- $\tilde{x}(G) = \begin{cases} 1 & [G] = x \\ 0 & [G] \neq x \end{cases}$
 $\longrightarrow \tilde{x}(G) = \tilde{x}(H)$ if $G \stackrel{\text{isom}}{\sim} H$.

部分コード図を数え上げる関数の定義 (5/5)

- ガウスワード G に対して $\text{Sub}(G) = \{H \mid H \text{ は } G \text{ からいくつか文字を消したものの}\}$ とする。

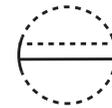
$CD = [G]$ とすると、整数値関数

$$x(CD) = \sum_{z \in \text{Sub}(G)} \tilde{x}(z).$$

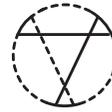
が定義される。(特に曲線 P の CD に適用できる.)

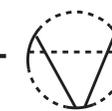
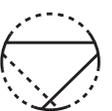
関数 $x(CD)$ が不変量となるための十分条件を書くために **relator** $\in \mathbb{Z}[G_{<\infty}]$ を定義する (5種類).

RI 

strong RII  +  + 

weak RII  +  + 

strong RIII  +  +  +  - ( +  +  + )

weak RIII  +  +  +  - ( +  +  + )

$R_{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 \epsilon_5} = \cup_{\epsilon_i=1} R_i$. ただし、

- R_1 = RI の relators 全体の集合
- R_2 = strong RII の relators 全体の集合
- R_3 = weak RII の relators 全体の集合
- R_4 = strong RIII の relators の全体の集合
- R_5 = weak RIII の relators の全体の集合
- $R_{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 \epsilon_5} (b, d) = O_{b,d}(R_{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 \epsilon_5})$

☆ $O_{b,d}$ は $b \leq$ コードの数 $\leq d$ とする proj.

定理 1. 自然数 b, d ($2 \leq b \leq d$) に対して,
 $\sum_{n_{b-1} \leq i \leq n_d} \alpha_i x_i$ を上記で定めたものとする.
 $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5) \in \{0, 1\}^5$ を勝手に選ぶ.

$\epsilon_j = 1$ ならば

$\sum_{n_{b-1} \leq i \leq n_d} \alpha_i \tilde{x}_i(y) = 0$ ($\forall y \in R_{0 \dots 0 \epsilon_j 0 \dots 0}(b, d)$)
と仮定する.

このとき $\sum_{n_{b-1} \leq i \leq n_d} \alpha_i x_i$ は $\epsilon_j = 1$ となるすべての
(射影された) ライデマイスター移動の整数値不変量と
なる.

- 具体例 ($R_{00010}(2, 3)$).

行列 $(\tilde{x}_i(r_j))$ ($r_j \in R_{00010}(2, 3)$) を書く.

$$\begin{array}{c}
 \otimes + 3\otimes - 3\circ - \circ \\
 \otimes + \oplus - 2\otimes \quad 3\otimes - 2\oplus - \circ
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \tilde{\otimes} \\
 \tilde{\oplus} \\
 \tilde{\otimes}
 \end{array}
 \left[\begin{array}{ccc}
 3 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 1 & 1 & 0
 \end{array} \right]$$

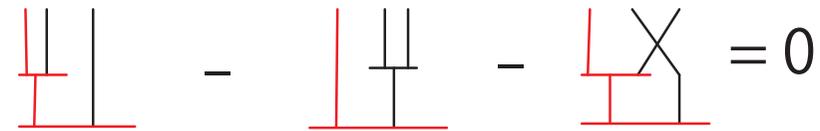
→RI と strong RIII の不変量 $3 \oplus - 3 \otimes + \otimes$ ができる (cf. [I.-Takimura, HJM 2015]).

今後の課題

- リー環の構造との対応

→ 不変量作成自動化の効率化

$$[[x,y], z] - [x,[y,z]] - [[x,z],y] = 0$$

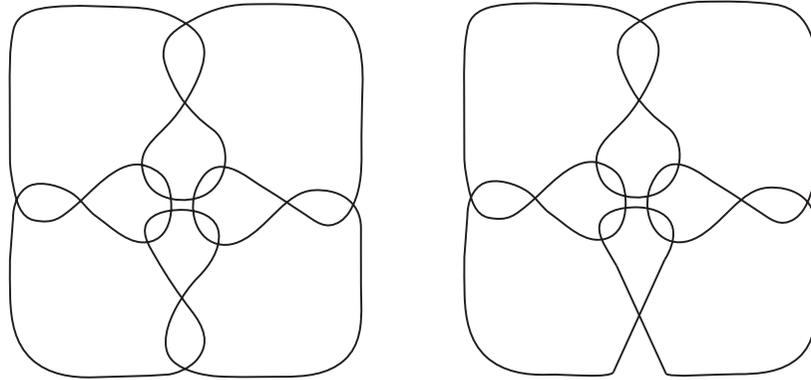

$$\text{Tree 1} - \text{Tree 2} - \text{Tree 3} = 0$$


$$\text{Circle 1} - \text{Circle 2} - \text{Circle 3} = 0$$

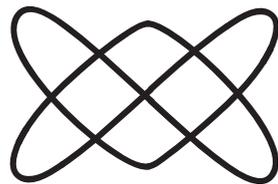
- 他分野への応用

(RI が入った) 球面曲線で面白いクラスの例

- RI と RIII のクラス (Östlund 予想)



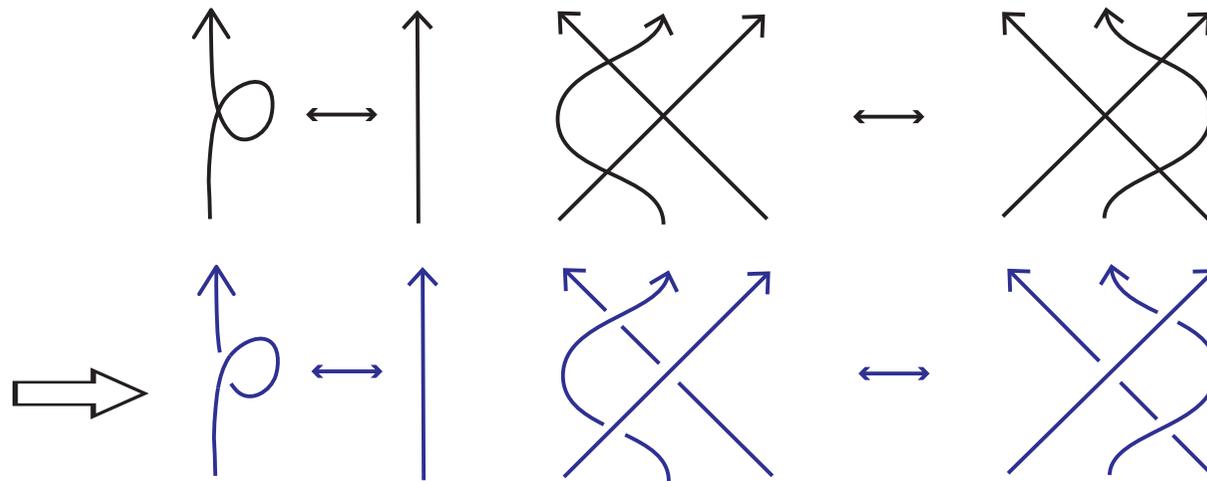
- RI, weak RII, weak RIII のクラス



- RI, weak RIII のクラス

次は単射か？ (S. Kamada, Y. Nakanishi)

(1, weak 3) class \mapsto positive knot isotopy class

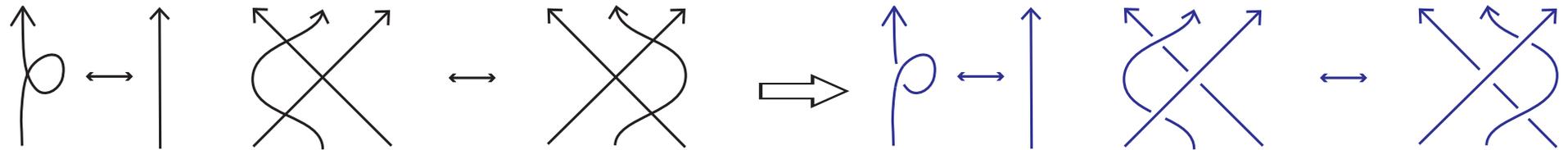


unknot では 1 対 1 [I.-Takimura, 2013]

- RI, weak RIII のクラス

次は単射か？ (S. Kamada, Y. Nakanishi)

(1, weak 3) class \mapsto positive knot isotopy class



unknot では 1 対 1 [I.-Takimura, 2013]

$$\dim V_{\text{knot}} \leq \dim V_{\text{pos.knot}} \leq \dim V_{(1,w3),\text{curve}}$$

ご静聴ありがとうございました。

$$[[x,y], z] - [x,[y,z]] - [[x,z],y] = 0$$

The diagrammatic representation of the equation $[[x,y], z] - [x,[y,z]] - [[x,z],y] = 0$ uses three terms separated by minus signs, all over a common red horizontal base line. The first term, $[[x,y], z]$, consists of a red horizontal line with a red vertical line on the left and a black vertical line on the right, connected by a red horizontal line at the top. The second term, $[x,[y,z]]$, consists of a red horizontal line with a red vertical line on the left and a black vertical line on the right, connected by a black horizontal line at the top. The third term, $[[x,z],y]$, consists of a red horizontal line with a red vertical line on the left and a black vertical line on the right, connected by a black horizontal line at the top that crosses the black vertical line.