

Branched standard spine 上の S-stable 葉層の構成

半田 伸

東北大学大学院理学研究科

2017/12/25

Contents

- 1 接触構造と葉層
- 2 branched standard spine
- 3 主結果
- 4 例
- 5 flow-spine 上の葉層

§1 接触構造と葉層 — 接触構造

定義 (接触構造)

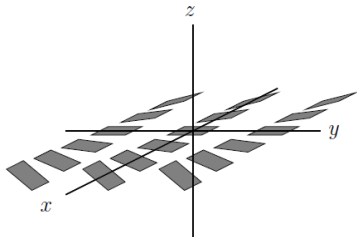
$(2n + 1)$ 次元多様体 M 上の超平面場 ξ が**接触構造**であるとは、 ξ が局所的に $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ を満たす 1-形式 α によって $\xi = \ker \alpha$ として定義されていることをいう。 α を**接触形式**、 (M, ξ) を**接触多様体**とよぶ。

例

\mathbb{R}^3 の直交座標 (x, y, z) に対して

$$\alpha_0 = dz + xdy$$

とおくと、 $\xi_0 = \ker \alpha_0$ は \mathbb{R}^3 の接触構造となる。

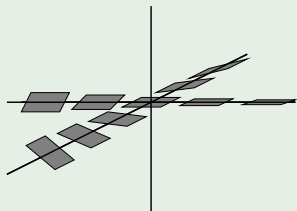


特性葉層

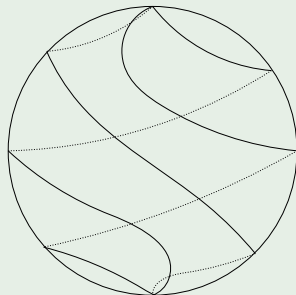
定義 (特性葉層)

3次元接触多様体に曲面が埋め込まれたとき、曲面と接触平面との交わりによって定まる葉層を**特性葉層**と呼ぶ。

例 (\mathbb{R}^3 の単位球面 S^2)



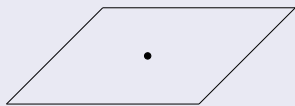
$$\ker(dz + r^2 d\theta)$$



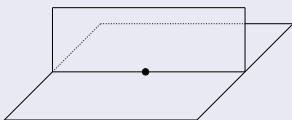
S^2 上の特性葉層

定義 (simple polyhedron)

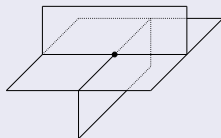
多面体 P が **simple** であるとは, P における各点の近傍が図のいずれかのモデルと同相であることをいう.



(1) region



(2) triple line



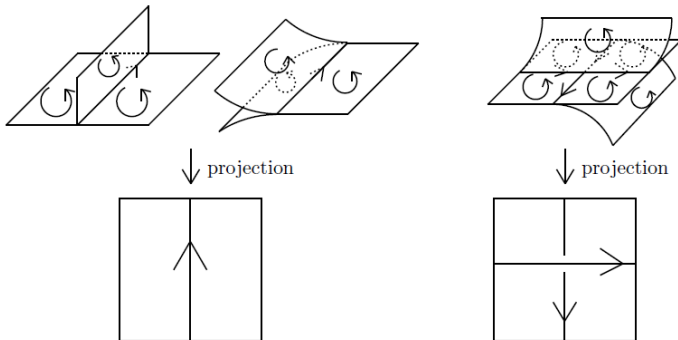
(3) true vertex

- $V(P)$: P の true vertex の集合
- $S(P)$: P の triple line と true vertex の集合

$S(P)$ を, P の singular set という.

定義 (branch 構造)

Simple polyhedron P の各面への向きづけで, どの triple line についても隣接する 3 つの region から同一の向きが誘導されないようなものを P の **branch 構造** という. branch 構造が与えられた simple polyhedron を **branched surface** という.



定義 (branched standard spine)

P を向き付られた境界つき 3 次元多様体 M に埋め込まれた branched surface とする. M が P に縮約 (collapse) するとき, P を M の **branched spine** という.

特に, P が次の 2 つの条件を満たすとき, P は M の **branched standard spine** であるという:

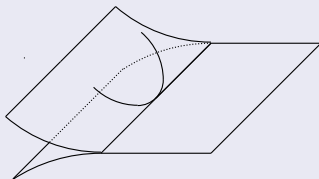
- $P \setminus S(P)$ の各連結成分が円板に同相である.
- $S(P) \setminus V(P)$ の各連結成分が線分である.

注意

閉 3 次元多様体 \hat{M} の spine は, $\hat{M} \setminus B^3$ からの縮約により得られるものとして定義する.

定義 (S-stable)

Branched surface P 上の葉層 \mathcal{F} が **S-stable** であるとは、 $S(P)$ 上に特異点が存在せず、 $S(P) \setminus V(P)$ に対して図のような接点のみを持つことをいう。



定理 (Benedetti, Petronio '00)

P を閉 3 次元多様体 \hat{M} の branched standard spine, \mathcal{F} を P 上の S-stable 葉層とし、 \mathcal{F} は divergence が 0 でない孤立特異点のみを持つとする。このとき、 \hat{M} 上の接触構造 ξ で、 \mathcal{F} が P 上の特性葉層となるものが存在する。

§3 主結果

向き付られた閉 3 次元多様体の branched standard spine P の各辺に実数を対応させるとき、次の条件を課す。

条件 (*)

P の各面 Σ について、 Σ を囲む辺に対応する値の総和が正となる。ただし、辺の向きが Σ の向きに対して反対のときは符号を入れ替えて加える。

定理 1 (H.)

P を閉 3 次元多様体の branched standard spine, e_1, \dots, e_n を P の辺とする。条件 (*) を満たす $(E_1, \dots, E_n) \in \mathbb{R}^n$ が与えられたとき、 P 上の 1-形式 β で、次を満たすものが存在する：

- $\int_{e_i} \beta = E_i$.
- β による P 上の葉層は S-stable である。
- $d\beta > 0$.

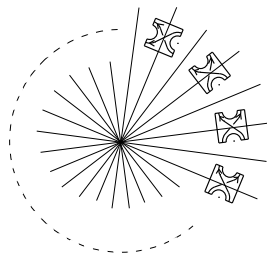
定理 1 の証明

定理 1 の証明の手順

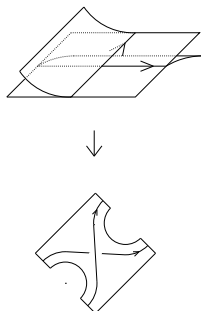
Step1: $\text{Nbd}(S(P); P)$ における 1-形式の構成

Step2: region への 1-形式の拡張

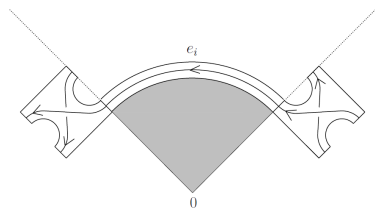
Step1. \mathbb{R}^2 に、1-形式 $r^2 d\theta$ による葉層を与え、
 \mathbb{R}^2 の同一円周上に P の頂点の近傍を射影する。



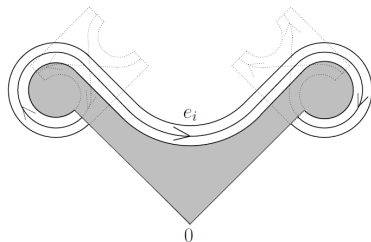
$\text{Nbd}(V(P); P)$ の \mathbb{R}^2 への射影



定理 1 の証明



$E_i > 0$ のとき



$E_i < 0$ のとき

このように、 E_i の符号に基づいて各辺 e_i の射影を与える。

Nbd($S(P)$; P) 上の 1-形式 β_0 をこのような射影による $r^2 d\theta$ の引き戻しで与えるとき、

$$\int_{e_i} \beta_0 = E_i$$

となるような射影が存在する。

定理 1 の証明

Step2.

以下の補題を P の各面に適用し、 P 上の 1-形式を得ることができる。 \square

補題 (Thurston, Winkelkemper '75)

Σ を境界つき曲面とする。 β_0 を Σ における $\partial\Sigma$ の近傍の 1-形式とし、

$$\int_{\partial\Sigma} \beta_0 > 0$$

を満たすとする。 このとき、次を満たすような Σ 上の 1-形式 β が存在する:

- $\beta = \beta_0$ on $\text{Nbd}(\partial\Sigma; \Sigma)$
- $d\beta > 0$

定理 2 (H.)

P を閉 3 次元多様体の branched standard spine で、頂点数が奇数であるようなものとする。 $\#V(P) = 2n + 1$ とする。 P のある面 Σ で、すべての辺の向きが Σ から与えられる向きと異なる $(2n + 1)$ 角形が存在するとき、 P 上の S-stable 葉層で、すべての辺に横断的に交わるものは存在しない。

証明の方針

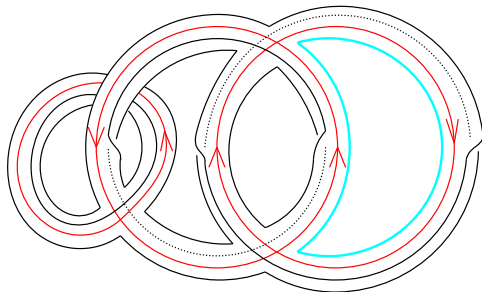
P 上に、全ての辺に横断的に交わる葉層 \mathcal{F} が存在すると仮定する。
このとき、定理 1 のように $\text{Nbd}(V(P); P)$ をある方法で \mathbb{R}^2 に射影することで \mathcal{F} が得られる。 Σ の性質から頂点の射影に制約が生じることに注意して、考えられる $\text{Nbd}(S(P); P)$ の射影を組み合わせた的に調べることで矛盾を導く。

接点を持たない葉層の例

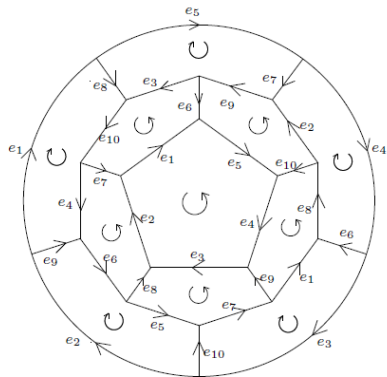
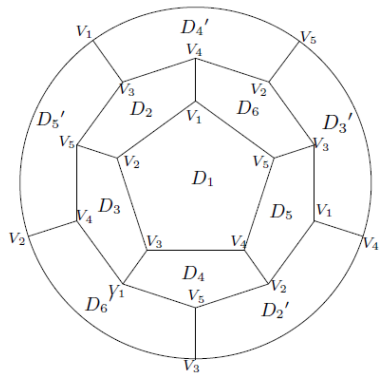
定理 2 (H.)

P を閉 3 次元多様体の branched standard spine で、頂点数が奇数であるようなものとする。 $\#V(P) = 2n + 1$ とする。 P のある面 Σ で、すべての辺の向きが Σ から与えられる向きと異なる $(2n + 1)$ 角形が存在するとき、 P 上の S-stable 葉層で、すべての辺に横断的に交わるものは存在しない。

以下のような branched standard spine 上の葉層で、接点を持たないものが存在する。



§4 例 — ポアンカレホモロジー球面



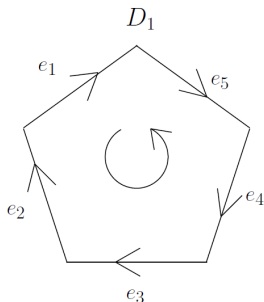
正 12 面体の与える不等式

条件 (*) (Recall)

P の各面 Σ について、 Σ を囲む辺に対応する値の総和が正となる。
ただし、辺の向きが Σ の向きに対して反対のときは符号を入れ替えて加える。

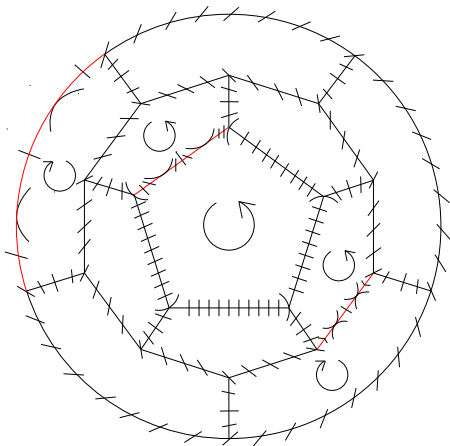
$$\left\{ \begin{array}{l} -E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - E_5 > 0 \\ -E_6 + E_3 + E_{10} + E_7 + E_1 > 0 \\ -E_7 + E_4 + E_6 + E_8 + E_2 > 0 \\ -E_8 + E_5 + E_7 + E_9 + E_3 > 0 \\ -E_9 + E_1 + E_8 + E_{10} + E_4 > 0 \\ -E_{10} + E_2 + E_9 + E_6 + E_5 > 0 \end{array} \right.$$

$$(E_1, \dots, E_{10}) = \left(-1, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 1, 1, 1, 1, 1\right)$$

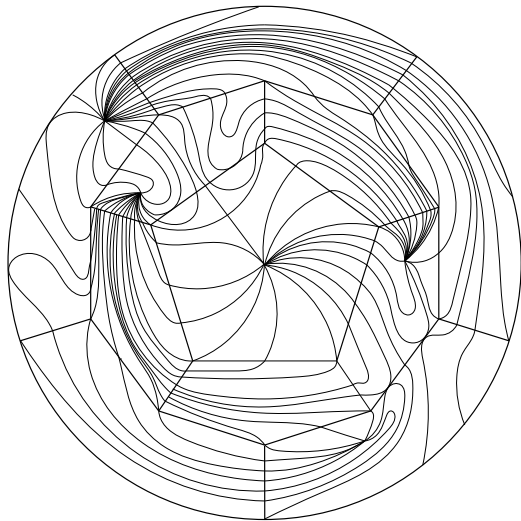


葉層の構成

$$(E_1, \dots, E_{10}) = \left(-1, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 1, 1, 1, 1, 1\right)$$



葉層の構成

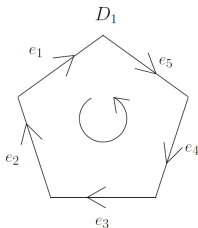


葉層の構成

定理 2 (Recall)

P を閉 3 次元多様体の branched standard spine で、頂点数が奇数であるようなものとする。 V_1, \dots, V_{2n+1} を P の頂点とする。 P のある面 Σ で、すべての辺の向きが Σ から与えられる向きと異なる $(2n+1)$ 角形が存在するとき、 P 上の S-stable 葉層ですべての辺に横断的に交わるものは存在しない。

D_1 が定理 2 の仮定を満たすので、ポアンカレホモロジー球面の branched standard spine 上の S-stable 葉層で、全ての辺に横断的に交わるものは存在しない。



§5 flow-spine 上の葉層

flow-spine においては、定理 2 の頂点数の仮定を外すことができる。

定理 3 (H.)

P を閉 3 次元多様体の flow-spine とする。 P のある面 Σ で、すべての辺の向きが Σ から与えられる向きと異なる面が存在するとき、 P 上の S-stable 葉層で、すべての辺に横断的に交わるものは存在しない。

予想

任意の flow-spine において、定理 3 における Σ が存在する。 すなわち、任意の flow-spine 上の S-stable 葉層で、全ての辺に横断的に交わるものは存在しない。