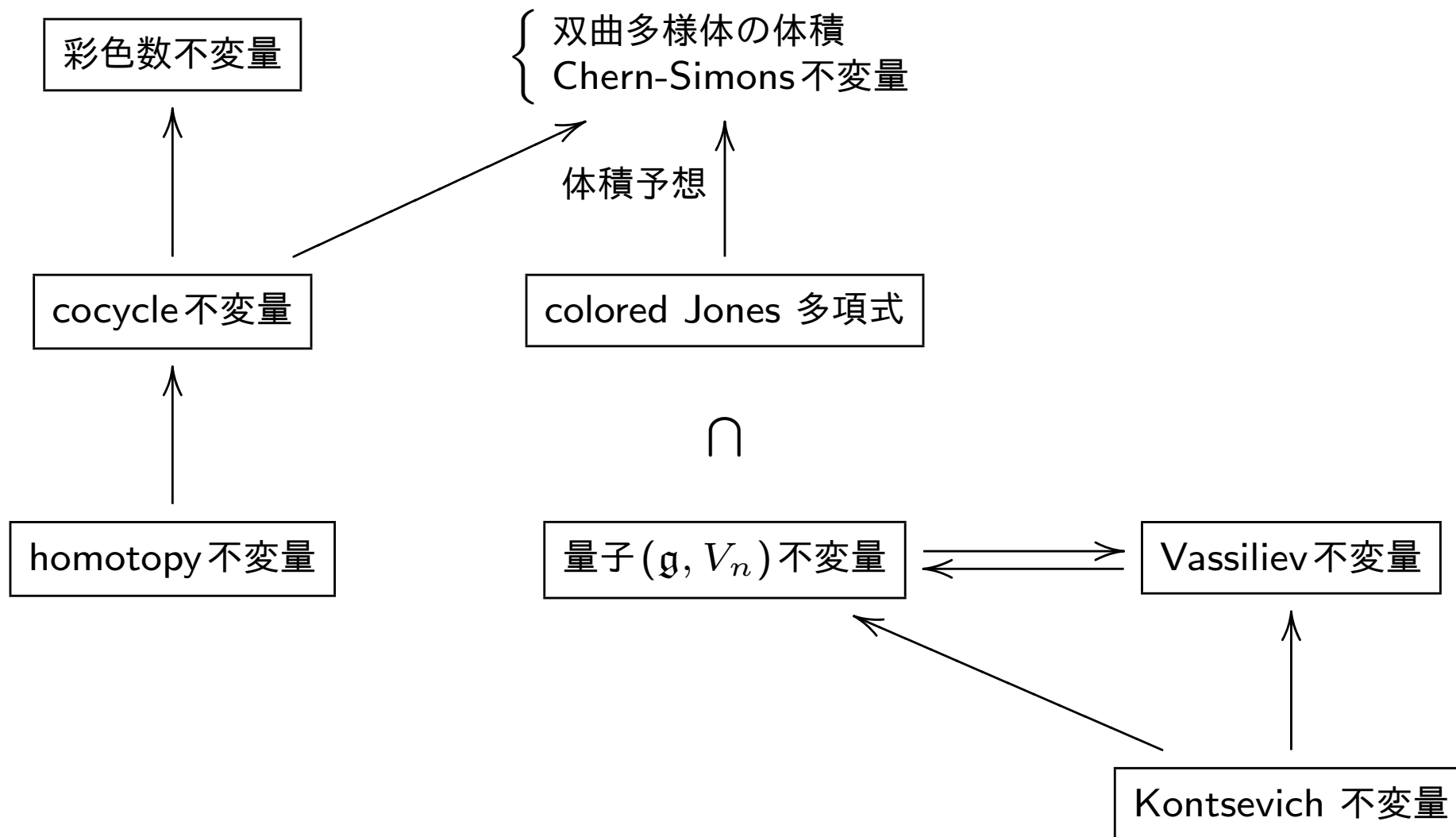


2017年12月23日

ハンドル体結び目の摂動的 sl_2 不 変量と種数2の場合の計算方法

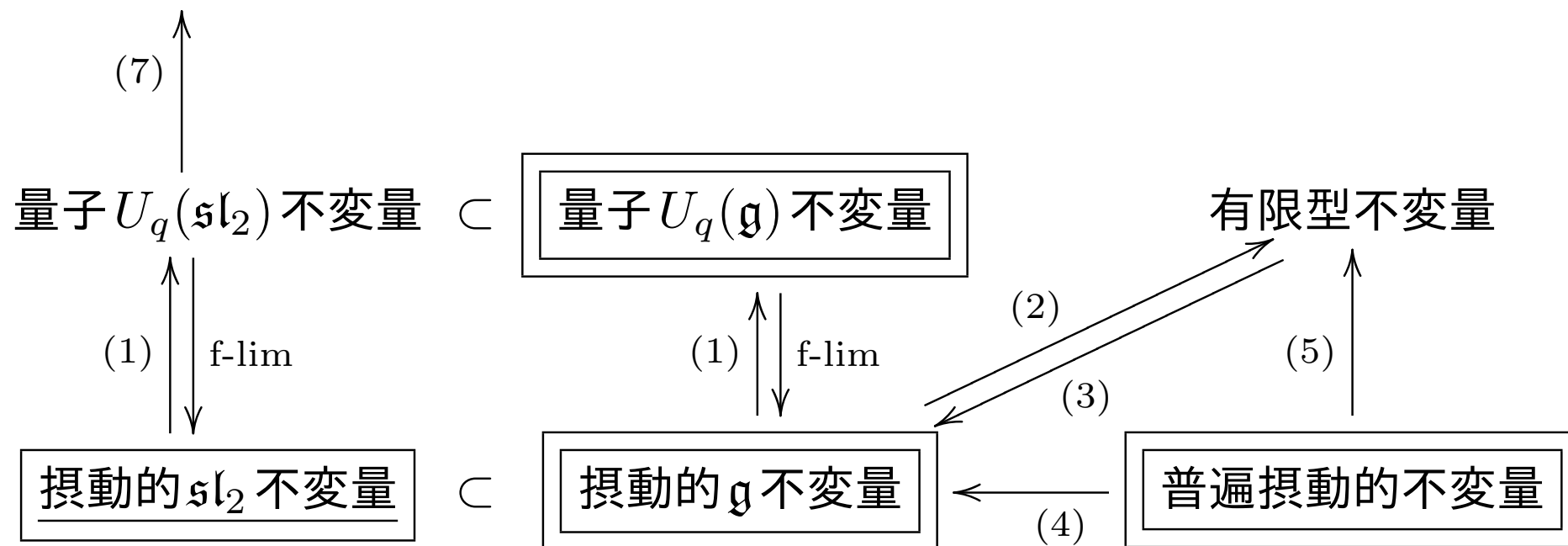
阿部翠空星

結び目の不変量の相関図



ハンドル体結び目の不変量の予想相関図

{ 双曲多様体の体積
Chern-Simons 不変量



今日の話の流れ

- ハンドル体結び目の量子 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 不変量の復習
- 摂動的な不変量の定義と復習
- 主定理と計算例
- 主定理の証明の概略
- 一般のハンドル体結び目への応用
- 今後の課題と予想

ハンドル体結び目の量子 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 不変量

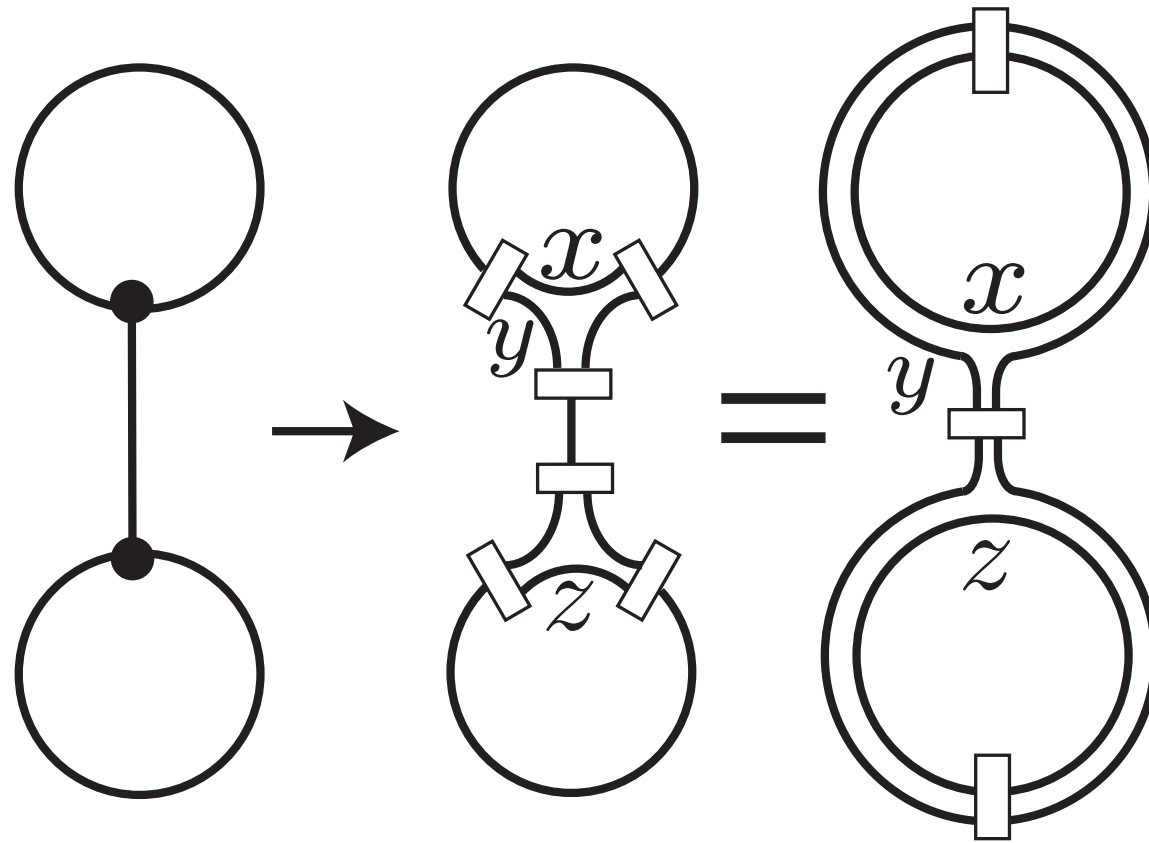
Definition 1. (Jones-Wenzl 冪等元) 以下のように両端に n 個の端点を持つ図式の線型和で，帰納的に定義する．

$$\begin{array}{|c|} \hline n+1 \\ \hline \text{[Diagram: box with vertical bar]} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \text{[Diagram: box with vertical bar]} \\ \hline n \\ \hline \end{array} - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \begin{array}{|c|} \hline 1 \quad 1 \\ \hline \text{[Diagram: box with two vertical bars]} \\ \hline n \quad n \\ \hline \end{array}$$

$$\Delta_n = (-1)^n \frac{A^{2(n+1)} - A^{-2(n+1)}}{A^2 - A^{-2}}, \quad A^{4p} = 1,$$

$$A = -q^{1/4}$$

Definition 2. 3価の colored graph の射影図を図のように Jones-Wenzl 冪等元を用いて閉曲線の線型和と見なす.



Definition 3. 3価頂点は admissible 条件を満たすものしか考えない.

$$\begin{aligned} 0 \leq x, \quad 0 \leq y, \quad 0 \leq z, \\ x + 2y \leq p - 2, \quad z + 2y \leq p - 2. \end{aligned}$$

または,

$$\begin{aligned} x \leq 0, \quad y \leq p - 2, \quad z \leq 0 \\ x + 2y \geq p - 2, \quad z + 2y \geq p - 2 \end{aligned}$$

Definition 4. (補正項)

$$\begin{aligned}
 \theta(x, y, z) &:= \left\langle \text{Diagram} \right\rangle \\
 &= \frac{\Delta_{x+y+z}! \Delta_{x-1}! \Delta_{y-1}! \Delta_{z-1}!}{\Delta_{y+z-1}! \Delta_{x+z-1}! \Delta_{x+y-1}!}
 \end{aligned}$$

The diagram is a circle with three small squares on its right side. The top square is labeled z , the middle square is labeled y , and the bottom square is labeled x . Two arcs connect the top and middle squares, and two arcs connect the middle and bottom squares, forming two nested loops.

Theorem 1 (Mizusawa, Murakami. J 2011). D を種数2のハンドル体結び目 H の射影図とする. 整数 p に対して, 次の値は種数2のハンドル体結び目の量子 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 不変量である.

$$\langle H \rangle_p^{\mathfrak{sl}_2} := \sum_{y=0}^{\lfloor \frac{p-2}{2} \rfloor} \sum_{x=0}^{p-2y-2} \sum_{z=0}^{p-2y-2} \frac{\langle D(x, y, z) \rangle \overline{\langle D(x, y, z) \rangle}}{\theta(x, y, y) \theta(z, y, y)}$$

Example 2 (Mizusawa, Murakami.J 2011).

$$\langle \text{Handcuff} \rangle_p^{\mathfrak{sl}_2} = \left(\frac{2p}{q - q^{-1} - 2} \right)^2$$

Definition 5. H の量子 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 不変量を Handcuff(正規化定数) で割ったものを新しい量子 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 不変量とする.

$$\tau_p^{\mathfrak{sl}_2}(H) := \frac{\langle H \rangle_{2p}^{\mathfrak{sl}_2}}{\langle \text{Handcuff} \rangle_p^{\mathfrak{sl}_2}}$$

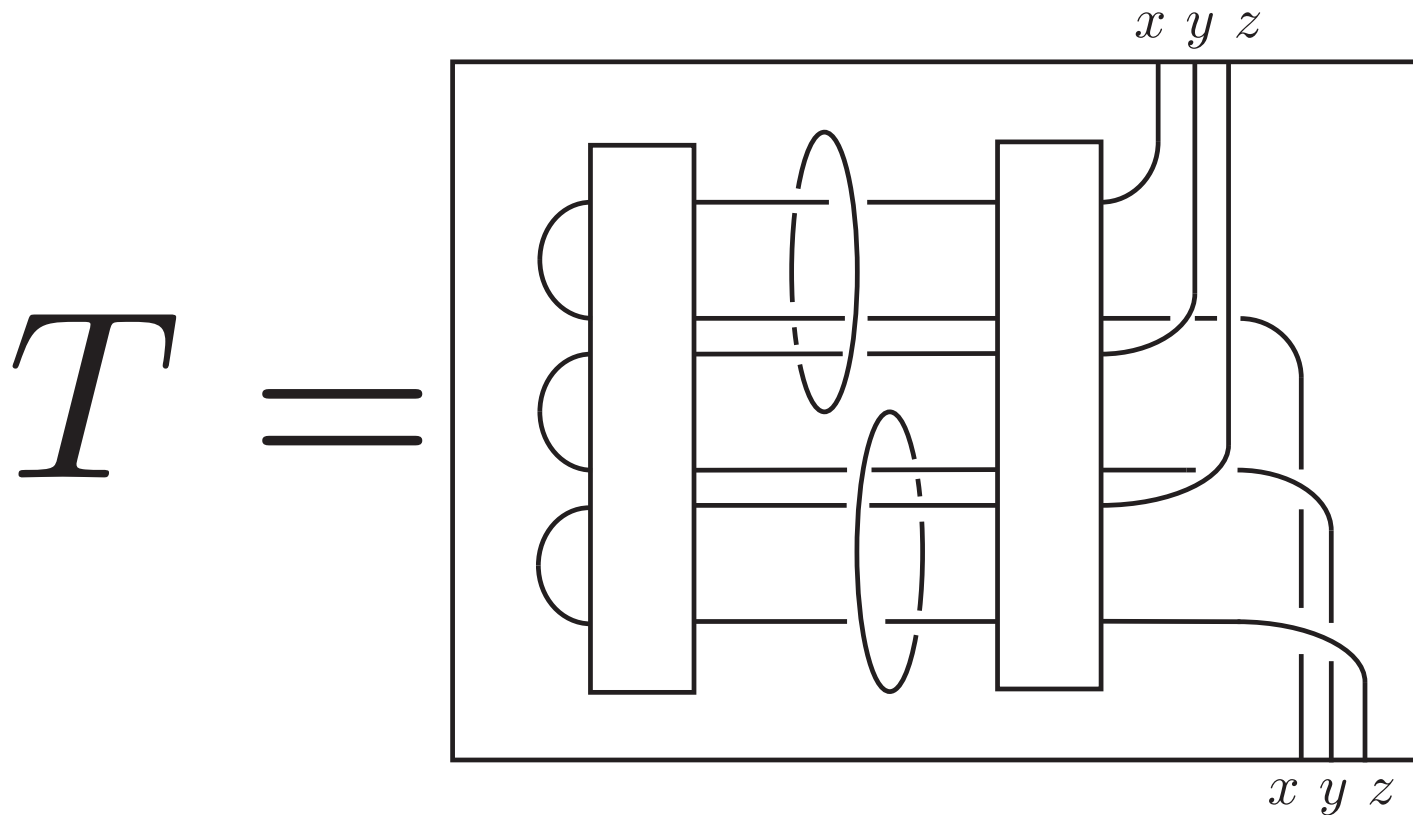
摂動的不変量の定義と復習

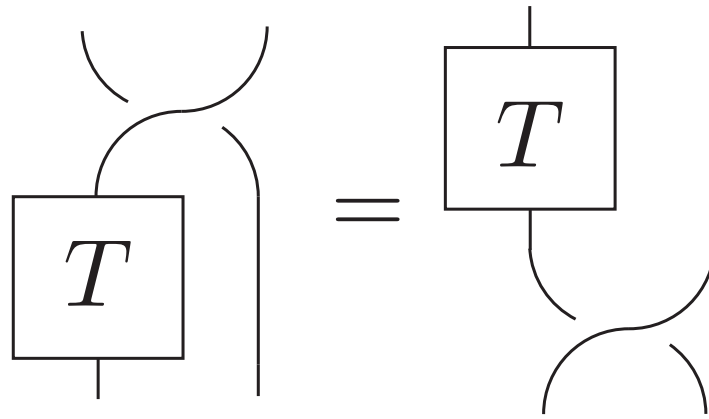
Theorem 3 (Abe 2017). p を奇素数,
 $\zeta = e^{2\pi i/p}$ とする.

$$\tau_p^{\mathfrak{sl}_2}(H)|_{q=\zeta} \in \mathbb{Z}[\zeta]$$

証明の概略

閉じた時にハンドル体結び目に isotopic になるようなタングル T を以下の図のように定める。





インタートウィナーより $Q^{sl_2; V_n}(T)|_{q=\zeta}$ は $U_\zeta(sl_2)$ の中心の元である。

$$\rho_{V_{x+y+z}}(c^k) = (\zeta^{(x+y+z)/2} + \zeta^{-(x+y+z)/2})^k \cdot id_{V_{x+y+z}}$$

$$\sum_{x=0}^{p-1} \sum_{y=0}^{p-1} \sum_{z=0}^{p-1} [x]^2 [y]^2 [z]^2 (\zeta^{j(x+y+z)/2} + \zeta^{-j(x+y+z)/2})$$

$$\equiv \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{(\zeta - 1)^i}{i} \right)^{3(p-1)}$$

$$p = u \cdot (\zeta - 1)^{p-1}$$

数論的な摂動展開

$$\tau_p^{\mathfrak{sl}_2}(H) = a_{p,0}(H) + a_{p,1}(H)(\zeta - 1) + a_{p,2}(H)(\zeta - 1)^2 + \dots$$

$$T(q) = \binom{p}{1} + \binom{p}{2}(q-1) + \binom{p}{3}(q-1)^2 + \dots + \binom{p}{p}(q-1)^{p-1}$$

とおくと、 $\mathbb{Z}[\zeta] \simeq \mathbb{Z}[q]/T(q)$ より $(a_{p,l}(H) \pmod{p}) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は $\tau_p^{\mathfrak{sl}_2}(H)$ の値から一意に定まる。

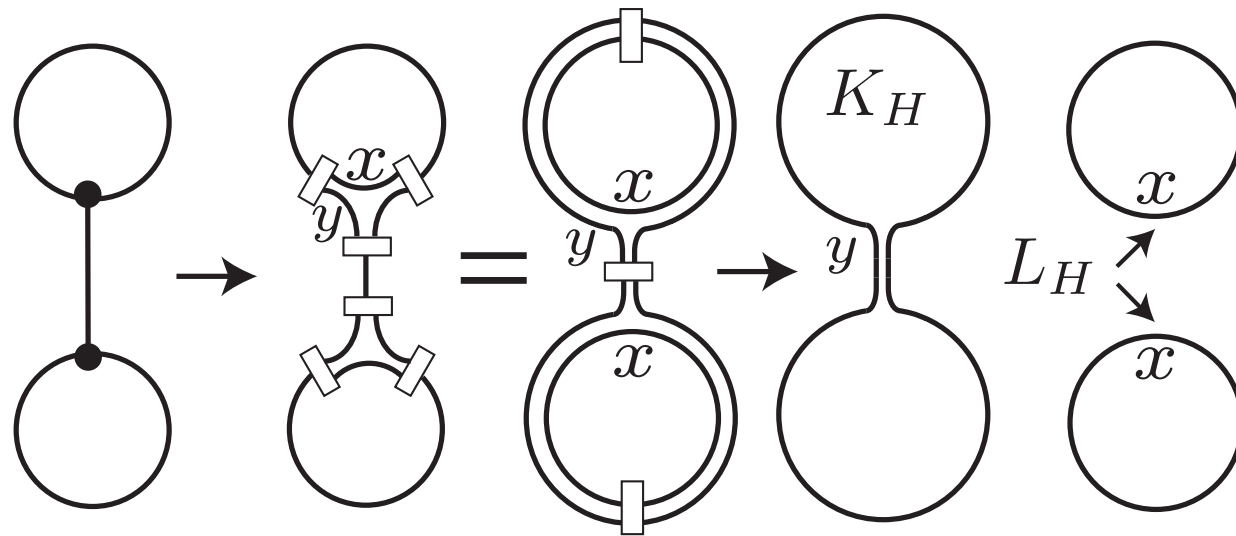
Theorem 4 (Ohtsuki 2008).

$$\begin{aligned} & \text{f-lim} \frac{\zeta - \zeta^{-1} - 2}{2p} \cdot \sum_{y=0}^{p-2} \Delta_y \langle K \rangle \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1+c}{1-c} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\text{Res}_{t=c} \frac{(t + t^{-1} - 2) P_l(t)}{t \cdot \Delta_K(t)^{2l+1}} \right) (\zeta - 1)^l \end{aligned}$$

$\Delta_K(t)$ は K の Alexander 多項式, c は 0 または $\Delta_K(t)$ の零点とする.

主定理と計算例

Definition 6. 種数2のハンドル体結び目から以下のように得られる結び目と絡み目を K_H , L_H とする.



※ K_H , L_H は H から一意には決まらない.

Theorem 5 (Abe 2017).

$$\begin{aligned}
 \tau^{sl_2}(H) &:= \text{f-lim } \tau_p^{sl_2}(H) = \sum_s \\
 &\text{f-lim} \left(\left(\frac{\zeta - \zeta^{-1} - 2}{2p} \right)^2 \cdot \left(\sum_{x=0}^{p-2} \Delta_x (\zeta^{xs} + \zeta^{-xs}) \langle L_H \rangle \right. \right. \\
 &\quad \left. \sum_{x=0}^{p-2} \Delta_x (\zeta^{xs} + \zeta^{-xs}) \langle \bar{L}_H \rangle + \sum_{y=0}^{p-2} \Delta_y (\zeta^{ys} + \zeta^{-ys}) \langle K_H \rangle \right. \\
 &\quad \left. \left. \sum_{y=0}^{p-2} (\zeta^{ys} + \zeta^{-ys}) \frac{\Delta_y}{\Delta_{2y}} \langle \bar{K}_H \rangle \right) \right)
 \end{aligned}$$

Example 6 (Abe 2017). $c = e^{\pi\sqrt{-1}/3}$ とする.

$$\begin{aligned} \tau^{sl_2}(5_1, c) &= \left(\frac{2\sqrt{-1}}{27\sqrt{3}} + \sum_s \frac{2\sqrt{-1}}{81} (2\sqrt{3} \right. \\ &\quad \left. \cos^2 \frac{\pi s}{3} - \frac{9s}{2} \sin \frac{2\pi s}{3} + 3\sqrt{3}s^2 \sin^2 \frac{\pi s}{3}) (\zeta - 1) \right. \\ &\quad \left. + O((\zeta - 1)^2) + C \right) \\ \tau^{sl_2}(6_4, c) &= \left(\frac{\sqrt{-1}}{3\sqrt{3}} + \sum_s \frac{2\sqrt{-1}}{3\sqrt{3}} \right. \\ &\quad \left. \cos^2 \frac{\pi s}{3} \right) (\zeta - 1) + O((\zeta - 1)^2) + C \end{aligned}$$

主定理の証明の概略

Lemma 7. $\varphi_1(t) = \varphi_1(t^{-1}), \varphi_2(t) = \varphi_2(t^{-1}),$

$N = \min\{\deg\varphi_1(t), \deg\varphi_2(t)\},$

$p > \max\{\deg\varphi_1(t), \deg\varphi_2(t)\}$

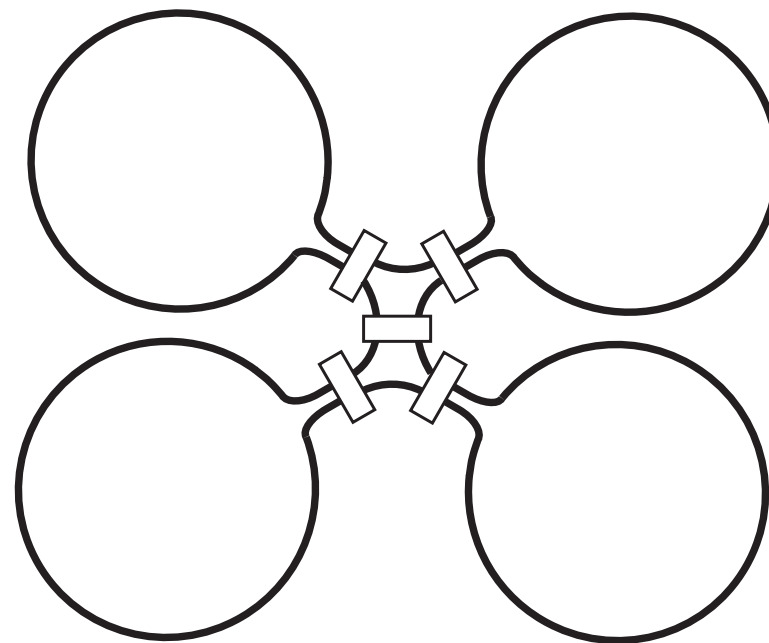
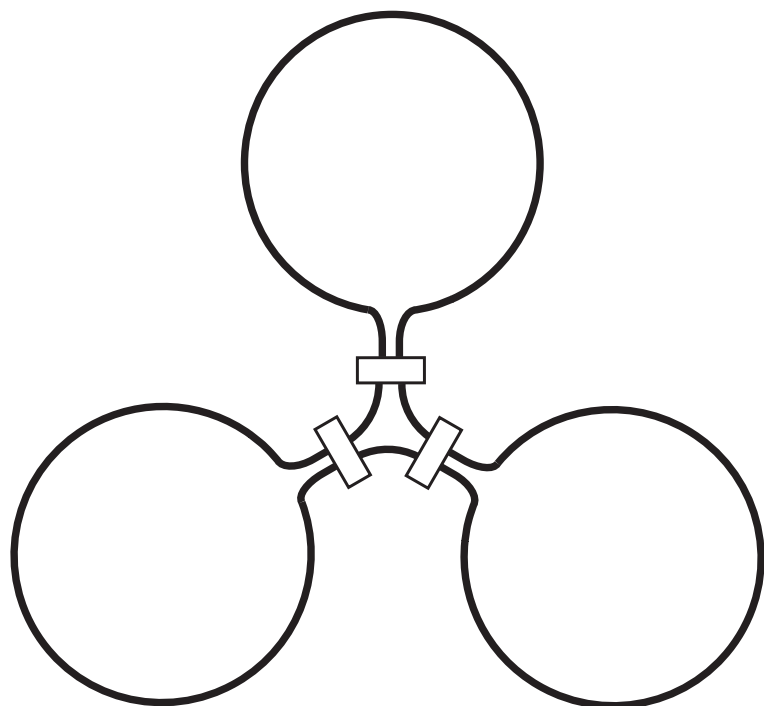
$$\frac{1}{p} \sum_{n \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \varphi_1(\zeta^{n+1}) \varphi_2(\zeta^{n+1}) =$$

$$\frac{1}{p} \sum_{n \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \varphi_1(\zeta^{n+1}) \frac{1}{p} \sum_{n \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \varphi_2(\zeta^{n+1}) +$$

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{s=1}^N \frac{1}{2^p} \sum_{n \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} (\zeta^{(n+1)s} + \zeta^{-(n+1)s}) \varphi_1(\zeta^{n+1}) \\
& \frac{1}{2^p} \sum_{n \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} (\zeta^{(n+1)s} + \zeta^{-(n+1)s}) \varphi_2(\zeta^{n+1}) = \\
& \operatorname{Res}_{t=0} \frac{\varphi_1(t)}{t} \operatorname{Res}_{t=0} \frac{\varphi_2(t)}{t} + \\
& 2 \sum_{s=1}^N \operatorname{Res}_{t=0} \frac{(t^s + t^{-s}) \varphi_1(t)}{2t} \operatorname{Res}_{t=0} \frac{(t^s + t^{-s}) \varphi_2(t)}{2t}
\end{aligned}$$

一般のハンドル体結び目への応用

種数3, 4の場合は以下の形を計算すればよい
(計算は難しい).



今後の課題と予想

Problem 8. (有限型不変量の改良) 摂動的不変量の係数は有限型不変量であるか. また, それはハンドル体結び目のどのような同値関係であるか.

- ・ クラスパーを応用できるか?

Problem 9. (摂動的 \mathfrak{g} 不変量) 一般のリー環 \mathfrak{g} に対して, $\tau^{\mathfrak{g}}(H)$ は存在するか.

Problem 10. Z : Kontsevich 不変量とすると,
適切な写像 ι が存在して,

$$\hat{Z}(H) = \frac{\iota(Z(K_H) + Z(L_H))}{\iota(Z(O))}$$

$Z(H)$ は H の普遍摂動的な不変量になるか.

- ・ 終集合はどのような空間か？

Problem 11. 空間グラフに対して，以下の図は成立するか.

{ 双曲多様体の体積
Chern-Simons 不変量

