

具体的な折り目写像を通したいろいろな多様体の表現

北澤 直樹

本稿では、「結び目の数学 □」の同名の講演に沿って関連した説明を行う。「結び目の数学 VIII」の内容の多くと講演後に分かった内容の報告が今回の講演の内容であり、「結び目の数学 VIII」報告集 ([13]) と記述が重なる部分もかなりあることを添えておく。

講演同様多くの (可微分) 多様体や可微分写像を扱うが、特に断りのない限り、考えている多様体や写像さらには多様体上の多様体をファイバーとする束はすべて可微分 (C^∞ 級) とする。以下用語をいくつか説明する。

(可微分) 写像の 特異点 とは、微分が退化している点つまり微分の階数が最大でないような定義域多様体の点のことである。今回は基本的に定義域多様体の次元が値域のそれより高いものを扱うが、微分の階数が値域の次元より低いような点ということになる。写像の特異点全体の集合を 特異点集合、写像の特異点での値を 特異値、写像の特異点集合の像を 特異値集合、特異値集合を値域多様体から除いた空間の点を 正則値 といい、正則値全体の集合を 正則値集合 ということにする。

1. MORSE 関数の理論とその高次元化と可微分多様体の (微分) 位相幾何学への応用

Morse 関数は、(可微分) 多様体に必ずしもたくさんある良い関数である。特に閉多様体上の場合特異点は有限個あり、各特異点で値が異なるものが沢山ある。そして、特異点から、多様体のホモロジー群や一部のホモトピー的な情報がわかる。

Morse 関数の理論は、20 世紀前半にはもう登場しており、例えば 1950–70 年代の高次元を中心とした多様体の (微分) 位相幾何学で活躍した。例えば、Milnor による 7 次元のエキゾチック球面の発見で間接的に役立った。より詳しくは、多様体が位相的には球面であることを示す部分で、未だ見つかっていない 4 次元の標準的でない球面以外のホモトピー球面が、Morse 関数で特異点を丁度 2 個有するものをもつ多様体として特徴づけられるという有名事実 (**Reeb の定理**) が使われた。他 h-同境定理等も生まれた。

そして、Morse 関数の理論は、現在幾何学を中心とした数学で基本的で重要な手法となっている。

さて、値域を定義域より次元の高くない一般の n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n に変えるとより多様体に分かるのではと考えるのは自然なことである？そしてこれは実際正しいことが明らかにされてきている。1950 年代の Whitney や Thom の 2 次元以上の可微分多様体から平面への写像の理論等に始まる理論で、Levine, Eliashberg, Mather らの研究を経て 1990 年代に佐伯修氏や佐久間一浩氏に受け継がれた。

ここでは、ジェネリック な写像 (安定写像) と呼ぶ可微分写像が、Morse 関数のような役割を担う。最も重要なのが、Morse 関数の特異点論の立場からの高次元化である、折り目写像 である。折り目写像やジェネリックな写像、安定写像の基本的な事実については [4] 等が詳しい。

2. 折り目写像の定義と基本的な性質と重要なクラス

2.1. 折り目写像の定義と基本的な性質や問題。

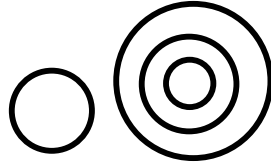


FIGURE 1. 同心円形折り目写像の例 (左は標準球面の標準射影などで得られる special generic 写像でもある)

Definition 1. 任意の特異点 p が, 整数 $0 \leq i(p) \leq \frac{m-n+1}{2}$ があり $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, \sum_{k=n}^{m-i(p)} x_k^2 - \sum_{k=m-i(p)+1}^m x_k^2)$ の型で表されるような可微分写像を 折り目写像 という.

Proposition 1. (1) Definition 1 で $i(p)$ は一意 (p の指数と呼ばれる).
 (2) (決まった指数の) 特異点全体の集合は, $n-1$ 次元の閉部分多様体で, そこへもとの写像を制限するとはめ込みになる.

Example 1. 値域が \mathbb{R} (1 次元の可微分多様体) の場合, 安定な折り目写像は必ずしもたくさん存在する (Morse 関数で各特異点で値が異なるものを考えればよい).

折り目写像の存在については, いくらか分かっていると同時に今も分かっていない部分が多い. 例えば, 値域が平面 (\mathbb{R}^2) の場合, 定義域多様体のオイラー数が偶数であることが存在の必要十分条件であることが, 前の Whitney や Thom, そして Levine らにより 1960 年代には分かっていた. そして値域がより高次元の場合, 1970 年代の Eliasheberg による研究に始まりいくつか解決しているが, 今に至るまで重要な問題である.

一方, 構成は難しい. しかし, 多様体を写像を通してみたり, 調べることににおいて, 当然重要なことである. 本稿では, 構成に関し, 講演でも紹介した, 今まで成功した構成例を成果としていくつか説明する.

3. SPECIAL GENERIC 写像と同心円形折り目写像とそれらの構成

Definition 2. 全ての特異点の指数が 0 であるような折り目写像を, special generic 写像 という.

Example 2. (1) 特異点を丁度 2 個有する Morse 関数 (ホモトピー球面を位相的に特徴づける関数; 未発見の 4 次元の標準球面でないものは除外).
 (2) 標準球面の自然な射影で得られる写像 (FIGURE 1 の左の図; 平面へのもので黒い部分が特異点集合の像つまり特異値集合). 2 次元以上の (4 次元でない) 球面と位相的に等しい可微分多様体は, 平面への同様の像を有する special generic 写像をもつ ([19]).
 (3) 二個の球面の直積 (Saeki 1993 他: 直積ではなく一般に振じれた束の全空間のケースもある) の連結和として表現される多様体上の, 像が標準球面と標準球体の直積の境界連結和として表現され特異値集合が境界に一致するもの (FIGURE 2)。

以下は special generic 写像の面白さが見え隠れする事実である.

Fact 1 ([19], [20]). m, n を自然数で $1 \leq m-n \leq 3$ を満たすものとする. このとき, \mathbb{R}^n への special generic 写像を許容する m 次元ホモトピー球面は必ず標準球面である.

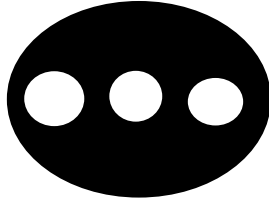


FIGURE 2. Example 2 (3) の写像の像 (k を 1 以上の整数とし像は $S^1 \times [-1, 1]$ の境界連結和で定義域は $S^1 \times S^k$ の連結和として表現される)

Fact 2 ([23]). 向きの入った 7 次元ホモトピー球面の微分同相型 28 個のうち 14 個の型のものは \mathbb{R}^3 への special generic 写像を許容しない.

さて、講演者が [8] で導入して系統的に研究している 同心円形折り目写像を導入する (実はもう少し形式的に書かれた定義が原論文にはある).

Definition 3 ([6] [8]). 特異点集合の像つまり特異値集合が、同心円状に埋め込まれた球面の非交和であるような安定な折り目写像を、同心円形折り目写像という.

同心円形折り目写像は、最も簡単な special generic 写像の一般化であるといえる. 前の **special generic 写像の面白さ**に刺激されたことが、このクラスを定式化し研究することに大きく影響した. FIGURE 1 の右の図は、特異値集合が 3 成分からなる平面への同心円形折り目写像である.

この写像と定義域多様体について、以下を示した.

Theorem 1 ([6], [7], [9]). m, n を $m > n$ をみたす 2 以上の自然数とする. n 次元の標準球面上の, $m - n > 0$ 次元の標準球面をファイバーとするような束の全空間 $l > 0$ 個の連結和としてあらわされる多様体は, \mathbb{R}^n への以下をみたす同心円形折り目写像を許容する.

- (1) 特異点集合の成分数は $l + 1$.
- (2) 正則値の逆像が標準球面の非交和.
- (3) 正則値の逆像の成分の個数の最大は $l + 1$.
- (4) 各特異値集合の成分 C について十分小さな閉管状近傍 $N(C)$ が取れるが, $f|_{f^{-1}(N(C))}$ は, f を, $N(C)$ を自然に C と閉区間 I の直積と見なしたときのあるファイバー $\{p\} \times I \subset C \times I$ の逆像に制限したものと C 上の恒等写像の直積とみなせる.

なお, Theorem 1 について, $m \geq 2n$ である場合には逆も成立することを示している, つまり説明したような写像を許容する多様体は, 説明したようなものになる. 説明したような多様体 (の族) を説明したような写像 (の族) によって特徴づけているのである; Reeb の定理は, (4 次元の標準球面でないホモトピー球面を除く) ホモトピー球面を特異点を丁度 2 個有する Morse 関数で特徴づけるというものだが, そういったものを写像の構成を通じ新たに見つけたことになる.

さて, 話を戻して, Theorem 1 と, [18] や [3] 等にある 7 次元のホモトピー球面に關する重要な事実を用いて以下が示される.

Corollary 1 ([7]). 7 次元のすべてのホモトピー球面 (向きも込めると微分同相型は 28 種類ある) は, \mathbb{R}^4 へ前の Theorem 1 のような写像で特異点集合が 3 成分以下であるものを許容する. 特に特異点集合の成分数 (球面の数) について以下がいえる.

- (1) 特異点集合の成分 1 個のものを許容するのは標準球面のみのみ.

- (2) 28 個の向きまで込めたホモトピー球面の型のうち, 標準球面を含む 16 個の型のものが, 特異点集合の成分が 2 個のものを許容する. そして残り 12 個はしない.
- (3) 全ての 7 次元ホモトピー球面が特異点集合の成分が 3 個からなるものを許容する.

特定の性質を満たす写像が, 可微分構造に制限を与えているという事実を, 前の **special generic** より広いクラスで新発見したわけである.

Theorem 2 ([11] [12]). 整数 $m > n \geq 2$ をとる. 前 Theorem 同様, 特異値集合の連結成分 C の閉管状近傍 $N(C)$ とし, 任意の C で $f|_{f^{-1}(N(C))}$ が, C 上の自明束とみなせる $N(C)$ のファイバーを L としたとき, Morse 関数 $f|_{f^{-1}(L)}$ と $\text{id}_{S^{n-1}}$ の直積と見なせるとする.

もし M 上の閉多様体 F をファイバーとした束が各 $f^{-1}(N(C)) \subset M$ に制限して自明ならば, 同様の性質をみたす \mathbb{R}^n への同心円形折り目写像が束の全空間にある.

Example 3 ([11] [12]). 例えば Theorem 2 の状況で $F = S^1$ としたとき以下の状況で定理が適用可.

- (1) $n \geq 4$. (2) $n = 3$ で定義域多様体が連結で像が 3 次元球体. (3) $n = 2$ で「束が向きづけ可能である」または「像が円板」.
- (3) の場合一般に異なる定義域多様体の組が可算無限できる (Theorem 1 の例等が簡単な適用できる例)。

4. さらなる折り目写像の構成

折り目写像の構成により多様体を表現するという話であるが, 前節で special generic 写像や, 同心円形折り目写像が構成できた. 定義域多様体の情報もいくらか分かる形で構成されている.

これ以外の写像や定義域多様体の例を次元を制限しないで構成できるかということになる. これに対し, 講演者は写像への手術の導入でこれまでいくつかの構成を行ってきた. それについて紹介していく.

手術とは, 多様体や写像について一部分を切って新たなものを貼り直すという形で変化させる基本的な操作である. まず多様体や写像の手術について関連する (とされる) 先行研究を, 申し訳ないこと浅学ゆえの誤解もあるかもしれないが述べる.

多様体の手術は, 1950–70 年代の高次元多様体の (微分) 位相幾何学的な理論でも低次元多様体の同様の理論でも重要である. また, Morse 関数の特異点と, ハンドルという標準球体と微分同相な多様体の適当な貼りあわせが対応しており, そこに手術が現れる等というのは重要な話である.

写像への手術は, Eliashberg による [1] や [2] 等に, 特異点集合への手術 (に近いもの) が, (あくまで折り目写像の存在に関する特に存在をホモトピー原理を用いて調べる理論であるが) 登場している. が今回の内容は, この Eliashberg の理論とは少し異なる内容である.

ある程度扱いやすい安定 (折り目) 写像のクラスへの具体的な手術と呼べる操作を多く導入し活用し, 講演者と近いところでしかし独立に多様体をある程度良い安定 (折り目) 写像を用いてみよう, 調べようとしているのが秋田大学の小林真人氏である. C-operation ([14]), R-operation ([17]) という 3 次元以上の閉多様体から平面への安定 (折り目) 写像への手術といえる操作を導入している. 写像を局所的に貼りかえて作りかえるという操作である. 特に R-operation は Theorem 1 の証明を作るうえで参考となった ([13] では説明した). 最近では, 一連の操作を踏まえ bubbling surgery という手術による操作をプレプリント [16] に纏めている ([15] も関連する内容であ

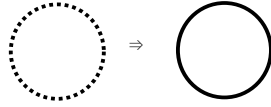


FIGURE 3. bubbling surgery (特異値集合に埋め込まれた球面 1 個分追加)

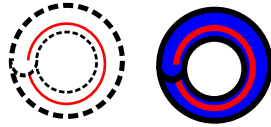


FIGURE 4. 値域多様体 \mathbb{R}^3 中の自明な結び目であるような正則値集合内の円周をとって管状近傍部分の逆像を標準球面 1 個分増やす (実線で印をつけられた境界のトーラスが新たな特異値の像)

る). 新たに特異点集合, 特異値集合として球面を一つ増やし新たに安定写像を得る操作である (FIGURE 3). この操作で特異値集合の一部として出てくる新たな球面の内部は特異値を有さず, 逆像が手術されて変化するのみである. さらに球面と内部以外の部分の逆像上では写像は変化しない.

Example 4. 前の Theorem 1 の写像は, bubbling surgery を標準球面の射影から繰り返してできる写像であるとも説明される.

以下はおおよそ [13] の重要な部分に関する話である.

$m > n$ を自然数とし, M を m 次元閉多様体, $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ を (特異点集合 $S(f)$ に制限すると埋め込みであるような安定な) 折り目写像とする.

そして $S \subset \mathbb{R}^n - f(S(f))$ を $k < n$ 次元向きづけ可能閉連結部分多様体, $N_i(S)$, $N(S)$, $N_o(S)$ を互いに異なり $N_i(S) \subset \text{Int}N(S)$, $N(S) \subset \text{Int}N_o(S)$ をみたす S の閉管状近傍で, $\mathbb{R}^n - f(S(f))$ に含まれる程度に小さいもの, Q を $f^{-1}(N_o(S))$ の成分で $f|_Q$ は $N_o(S)$ 上の S^{m-n} -束とする.

さらに, M' を $M - \text{Int}Q$ を部分多様体として含む m 次元閉多様体とする.

これらの状況で次を満たす折り目写像 $f' : M' \rightarrow \mathbb{R}^n$ があるとする.

- (1) $f|_{M - \text{Int}Q} = f'|_{M' - \text{Int}Q}$.
- (2) f' の特異値集合は $f(S(f)) \sqcup \partial N(S)$ に一致し, f' の特異点集合と $f'^{-1}(\partial N(S))$ の共通部分への制限は埋め込み.
- (3) $f'|_{(M' - (M - Q)) \cap f'^{-1}(N_i(S))}$ は 2 つの $N_i(S)$ 上の S^{m-n} -束を与える.

Definition 4. 前の状況において, f から f' を構成する手続きを S における normal S-bubbling operation と呼ぶ. S を 生成多様体 と呼ぶ.

要は, 正則値集合内にあり, 各点の逆像が標準球面を含むような S そしてその閉管状近傍について, 標準球面を分裂させる形で 1 個分増やすのである (特異値集合も閉管状近傍の境界という成分が増える: FIGURE 4 も参照のこと).

Example 5. (1) $m > n$ を自然数とし, M を m 次元閉多様体, $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ を折り目写像とし, S をある $f^{-1}(S)$ の成分 Q について, $f|_Q : Q \rightarrow S$ が自明な S^{m-n} -束の構造を与えるものとする. このとき f から S における normal S-bubbling operation で新たな m 次元閉多様体 M' と写像 f' を得ることができる. S は, 例えば正則値集合 $f(M) - f(S(f))$ の成分で閉包の境界が

$\partial f(M)$ の成分を含むものの中の開球内のものをとればよい (各点の逆像は標準球面); 例えば, f が標準球面の自然な射影ならば, S として正則値集合内の向きづけ可能で連結な閉部分多様体を取りさえすればよい.

- (2) Theorem 1 の写像は, 標準球面の射影から得られる同心円形折り目写像からはじめ有限回の点における normal S-bubbling operation で得られる.

上の Example 5 (2) で紹介したような話の一般化として, 簡単な写像例えば標準球面の自然な射影からはじめ, normal S-bubbling operation の繰り返しでどんな写像と定義域多様体得られるか?

という基本的な問題を, 今回は大体同じも少し変えた問題として

- 1 回または有限回の normal S-bubbling operation の繰り返しでどのように写像と定義域多様体変化するか?

という問題を考えたい.

5. 有限回の NORMAL S-BUBBLING OPERATION による折り目写像と定義域多様体の変化

今後 R を単項イデアル整域, 位相空間 X について $\chi(X)$ を X のオイラー数とする.

いくつか基本的な命題を述べる.

Proposition 2 ([22] 他 [6] [7] [8] 等). $m > n$ を自然数とする. M を m 次元閉多様体, $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ を特異点集合に制限すると商写像 $q_f : M \rightarrow W_f$ が単射になるような折り目写像 $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ で, 正則値が標準球面の非交和で, 特異点の指数が 0 か 1 であるものとする. 加えて $m - n = 1$ のとき, M は向きづけ可能とする. この時, $H_k(M; R) \cong H_k(W_f; R)$ かつ $\pi_k(M) \cong \pi_k(W_f)$ が $0 \leq k \leq m - n - 1$ で成り立つ.

商空間の有する低次の代数トポロジー的情報がそのまま定義域多様体の同じ情報をとらえていることを主張している. なお講演でも触れたが, 著者の至らなさから最近まで思っていなかったこと, 一部を除けば商空間を手掛かりに一部の次数の部分を除きホモロジー群はここでの主張にとどまらずかなり分かると思われる.

以下が仮定を満たす写像の例である.

Example 6. (1) special generic 写像 (Proposition 2 で同型を導くホモロジー群の次数 k は $0 \leq k \leq m - n$).

- (2) 仮定を満たす写像 f に normal S-bubbling operation を行った結果できる写像.

Remark 1. 一般にホモロジー群やホモトピー群の同型を導くというこの Proposition 2 のような有難い性質が他どのような写像で成り立つかという問題が, 自然に出てくる重要な問題である. 例えば定義域と値域の次元差が十分にあり正則値の逆像の連結度が十分に高い場合等は大丈夫であると思われ, 証明も考えればある程度の条件の下では書けそうである.

Proposition 3 ([13]). $m > n$ を自然数とし, M を m 次元の連結な閉多様体, $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ を折り目写像とし, S を $\mathbb{R}^n - f(M)$ 内の連結な向きづけ可能閉部分多様体で, ある $f^{-1}(S)$ の成分 Q について, $f|_Q : Q \rightarrow S$ が S^{m-n} -束の構造を与えるようなものとする. そして f から, S における normal S-bubbling operation で, m 次元の連結な閉多様体 M' と写像 $f' : M' \rightarrow \mathbb{R}^n$ を得ることができるとする. このときホモロジー群の関係式

$$H_j(W_{f'}; R) \cong H_j(W_f; R) \oplus H_{j-(n-\dim S)}(W_f; R)$$

とオイラー数の関係式

$$\chi(W_{f'}) = \chi(W_f) + (-1)^{n-\dim S} \chi(S)$$

が成立する.

この命題は, 提示されれば自然に感じる方も多いと思う. 実際 Mayer-Vietoris 系列などを利用すれば容易に証明できる.

Theorem 3 ([13]). 自然数 $m > n$ を考える. 任意の整数 $0 \leq j \leq n$ で, G_j を R 上の自由な有限生成加群とする. G_0 を自明とし, G_n が非自明で, $\sum_{j=1}^{n-1} \text{rank } G_j \leq \text{rank } G_n$ とする. このとき normal S-bubbling operation を連結な閉多様体 M 上の折り目写像 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ から繰り返して折り目写像 f' を商空間 $W_{f'}$ が $H_j(W_{f'}; R) \cong G_j \oplus H_j(W_f; R)$ を満たすように構成できる.

実際, これは, 適当な次元の標準球面を適当な個数とって閉部分多様体として埋め込み各球面における normal S-bubbling operation を行うことで得られる.

さて, 自由な有限生成加群の列 $\{G_k\}_{k=0}^n$ をほんの少しの制限を守り適当に選べば, $H_j(W_{f'}; R) \cong G_j \oplus H_j(W_f; R)$ となるように $W_{f'}$ を得ることができるというのが主張であるが, ホモロジー型はまだありえるのではと考えるのは自然である. 例えば (R が整数環 \mathbb{Z} の場合に) 振じれが出てくるような族も, 存在はするのではないかと考えるのは自然であるが, 具体的にできるのであろうか? 勿論, いざ作り具体的に提示しろとなると簡単ではない. 以下は一つ, 証明は一切省くが, **この疑問に対し, normal S-bubbling operation による構成を通じて答える.** [13] に挙げたものは別である.

Theorem 4 ([12]). 二つの自然数 $m > n \geq 5$ と以下を満たす有限可換群の列 $\{G_j\}_{j=0}^n$ があるとする.

- $3 \leq j \leq n-2$ 以外で自明.
- G_j の $3 \leq j \leq n-3$ の直和 ($n=5$ の時は自明群と定義) が G_{n-2} の部分群とみなせる.

さらに以下を満たす整数の列 $\{h_j\}_{j=0}^n$ があるとする.

- G_j が非自明なら h_{j-1} は正, $h_0 = 0$, $h_n \geq \sum_{j=0}^{n-1} h_j$.

このとき, m 次元の連結な閉多様体上の折り目写像 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ に対し, normal S-bubbling operation を繰り返して折り目写像 f' で $0 \leq j \leq n$ で

$$H_j(W_{f'}; R) \cong G_j \oplus \mathbb{Z}^{h_j} \oplus H_j(W_f; R)$$

が成立するものが作れる.

Remark 2. Theorem 3 で考えるくらいだと, 例えば標準球面の射影から始めた場合, はっきり分かるものはごく基本的な多様体例えば球面の直積や周辺しか出てこないようであり, 他はそれらとホモロジー群やコホモロジー環では区別できず特性類やホモトピーに頼らないと区別できないくらい似ているものしか出ないというのが, 現時点で執筆者の知るところである.

また, 終了後に座長より質問をして頂いた内容に絡むこと, 定義域も値域も低次元の場合 (定義域が次元 4 以下であったり値域が次元 2 以下の場合) はごく基本的な多様体例えば球面の直積や周辺しか出てこないようである.

関係ありそうな話, 以前「可微分写像の特異点セミナー」

(<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~okudat/singsemi/index.html>) で講演させて頂いたとき, 同心円形折り目写像は定義域多様体が低次元なら高々数えるほどの種類の多様体しか許容しないだろう, ある程度完璧に定義域多様体を決定できるだろうというコメントを頂いた.

一方, 起こらない変化も当然ある. 講演では少し触れたのみだが, 起こりうる変化を考えるうえで現れる制限に関し考え分かったものをいくつか挙げる.

Proposition 4. 折り目写像 f に対し normal S-bubbling operation を繰り返してできる折り目写像 f' について, R 上の有限生成加群の列 $\{G_j\}_{j=0}^n$ で G_0 が自明で G_n が非自明であるようなものがあり

$$H_j(W_{f'}; R) \cong G_j \oplus H_j(W_f; R)$$

となる.

Proposition 3 よりすぐわかることである.

Theorem 5 ([12]). Proposition 4 について, G_j が自明でないような最小の $1 \leq j \leq n$ を j_0 として

- $\text{rank } G_{j_0} \leq \text{rank } G_n$ で G_{j_0} は自由.
- 各回の操作で現れる生成多様体の最大次元は $n - j_0$.

Theorem 6 ([12]). Theorem 5 で n は 3 以上の偶数 (奇数) で $j_0 + 3$ 以下 $\chi(W_{f'}) - \chi(W_f) < 0$ (resp. $\chi(W_{f'}) - \chi(W_f) > 0$)

$l: \frac{|\chi(W_{f'}) - \chi(W_f)|}{2}$ 以上の最小の整数
とする. このとき G_n の階数 $r \geq l$.

Theorem 7 ([12]). Theorem 5 で, n は 6 以下の奇数 (偶数), $\chi(W_{f'}) - \chi(W_f)$ は -1 未満で奇数 (resp. $\chi(W_{f'}) - \chi(W_f)$ は 1 より大きくて奇数) のとき G_n の階数 $r \geq 2$.

6. 今後の展望

Theorem 1 (Example 5 (2)) のような写像は多様体の情報とともにやや限られる. そして, 同心円形に限らない場合, 写像も定義域多様体のタイプも豊富であることが, normal S-bubbling operations の導入と実行で, Theorem 3 や 4 等が示すように間接的に分かったといえる.

この先の進んだ課題を著者なりに挙げる. 早速

Problem 1. 写像や Reeb space, 定義域多様体の代数的位相幾何学的, 微分位相幾何学的な性質をもう少し探る. 例えばオイラー数やホモロジー群より精緻な情報例えばコホモロジー環や特性類やホモトピーや位相型, 微分同相型等を取り扱う.

が挙げられる. なお, 講演そしてこの報告は Reeb space に関する命題や定理を挙げるということが多くされている. Reeb space を知るのも大事なことだが, やはり定義域多様体について知らなくてはならない. そこで重要なのが, Remark 1 でも触れた以下である.

Problem 2. Proposition 2 の写像で成り立つようなホモロジー群やホモトピー群の同型を (いくらか) 導くという性質が成り立つ写像のクラスを探す.

最後に, 毎年この時期開催の「結び目の数学」にはかなりの頻度で参加させて頂いておりかつ時折講演させて頂いておりながら実質門外漢であったり, かつ今回無所属 (別の仕事を有し在野) という特別な身分でありながら, 講演の機会を下さった大山淑之先生, 新國亮先生に感謝致します. さらに, 座長を務めて下さり講演後にも質問をして下さった市原一裕先生, 講演後に 7 次元ホモトピー球面の分類とその上の special generic 写像に関する話をさせて頂いた山田裕一先生, そして講演を聴講して下さったすべての方にも感謝致します.

REFERENCES

- [1] Y. Eliashberg, *On singularities of folding type*, Math. USSR Izv. 4 (1970). 1119–1134.
- [2] Y. Eliashberg, *Surgery of singularities of smooth mappings*, Math. USSR Izv. 6 (1972). 1302–1326.
- [3] J. J. Eells, N. H. Kuiper, *An invariant for certain smooth manifolds*, Ann. Mat. Pura Appl. 60 (1962), 93–110.
- [4] M. Golubitsky V. Guillemin, *Stable Mappings and Their Singularities*, Graduate Texts in Mathematics (14), Springer-Verlag (1974).
- [5] M. Gromov, *Singularities, expanders and topology of maps. I. Homology versus volume in the spaces of cycles*, Geom. Funct. Anal. 19 (2009), 743–841.
- [6] N. Kitazawa, *On round fold maps* (in Japanese), RIMS Kokyuroku Bessatsu B38 (2013), 45–59.
- [7] N. Kitazawa, *On manifolds admitting fold maps with singular value sets of concentric spheres*, Doctoral Dissertation, Tokyo Institute of Technology (2014).
- [8] N. Kitazawa, *Fold maps with singular value sets of concentric spheres*, Hokkaido Mathematical Journal Vol.43, No.3 (2014), 327–359.
- [9] N. Kitazawa, *On the homeomorphism and diffeomorphism types of manifolds admitting round fold maps*, arXiv:1304.0618.
- [10] N. Kitazawa, *Constructions of round fold maps on smooth bundles*, Tokyo J. of Math. Volume 37, Number 2, 385–403, arxiv:1305.1708.
- [11] N. Kitazawa, *Constructions of round fold maps on circle bundles*, arXiv:1307.7270.
- [12] N. Kitazawa, *Constructions of fold maps by surgery operations and their Reeb spaces*, arxiv:1508.05630.
- [13] 北澤 直樹, 様々な折り目写像と定義域多様体そして折り目写像への手術について, 研究集会「結び目の数学 VIII」報告集 (2015), 76–85.
- [14] M. Kobayashi, *Simplifying certain stable mappings from simply connected 4-manifolds into the plane*, Tokyo J. Math. 15 (1992), 327–349.
- [15] M. Kobayashi, *Stable mappings with trivial monodromies and application to inactive log-transformations*, RIMS Kokyuroku. 815 (1992), 47–53.
- [16] M. Kobayashi, *Bubbling surgery on a smooth map*, preprint.
- [17] M. Kobayashi and O. Saeki, *Simplifying stable mappings into the plane from a global viewpoint*, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 2607–2636.
- [18] J. W. Milnor, *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. of Math. (2) 64 (1956), 399–405.
- [19] O. Saeki, *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces*, Topology Appl. 49 (1993), 265–293.
- [20] O. Saeki, *Topology of special generic maps into \mathbb{R}^3* , Workshop on Real and Complex Singularities (Sao Carlos, 1992), Mat. Contemp. 5 (1993), 161–186.
- [21] O. Saeki, *Simple stable maps of 3-manifolds into surfaces*, Topology 35 (1996), 671–698.
- [22] O. Saeki, K. Suzuoka, *Generic smooth maps with sphere fibers* J. Math. Soc. Japan Volume 57, Number 3 (2005), 881–902.
- [23] D. J. Wrazidlo, *Standard special generic maps of homotopy spheres into Euclidean spaces*, arxiv:1707.08646.

〒 224-0065 横浜市都筑区高山 19-9-606

E-mail address: naokikitazawa.formath@gmail.com