

ハンドル体結び目の cutting 数と constituent ハンドル体結び目

村尾 智 (筑波大数理物質)*

概 要

ハンドル体結び目とは3次元球面に埋め込まれたハンドル体のことであり、ハンドル体結び目をいくつかのメリディアン円板で切り開いて得られるハンドル体結び目を、そのハンドル体結び目の constituent ハンドル体結び目という。一般にあるハンドル体結び目に対し、その constituent ハンドル体結び目は無数に存在する。またハンドル体結び目の cutting 数とは、そのハンドル体結び目が自明になるために必要な切り開くメリディアン円板の最小数で定義される。本稿では、constituent ハンドル体結び目が満たすべき必要条件及び cutting 数に関する評価式を与える。

1. Constituent ハンドル体結び目と cutting 数

ハンドル体結び目 [1] とは、3次元球面 S^3 に埋め込まれたハンドル体のことであり、結び目の種数に関する一般化とみなすことができる。2つのハンドル体結び目 H_1, H_2 が同値であるとは、 S^3 の向きを保つ自己同相写像 f が存在して $f(H_1) = H_2$ が成り立つことであり、このとき $H_1 \cong H_2$ と表す。また、ハンドル体結び目が自明であるとは、その外部がハンドル体となることである。本稿では、種数 g の自明なハンドル体結び目を O_g と表す。また本稿では、種数1のハンドル体結び目にはそのスパインである S^1 の向きが一つ与えられているものとする。空間3価グラフとは、 S^3 に埋め込まれた3価グラフのことであり、空間3価グラフの **Y-orientation** とは、全ての頂点での入次数、出次数が共に1以上になるように空間3価グラフの各辺に向きを入れることである (図1)。任意の Y-oriented 空間3価グラフ K 及びハンドル体結び目 H に対して、 H が K の正則近傍となっているとき (特に種数1の時は H のスパインの向きと一致しているとき)、 K は H を表すという。任意のハンドル体結び目はある Y-oriented 空間3価グラフで表すことができる。また、ハンドル体結び目 H のダイアグラムを、 H を表す Y-oriented 空間3価グラフ K のダイアグラムで定義する。このとき、次の定理が成り立つ。

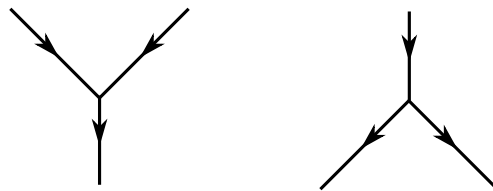


図 1: Y-orientations.

定理 1.1 ([2]). D_1, D_2 をそれぞれハンドル体結び目 H_1, H_2 のダイアグラムとする。このとき、 H_1 と H_2 が同値であることと、 D_1 と D_2 が有限回の Y-orientation を保つ R1-R6 変形 (図2) で移り合うことは同値である。

* e-mail: t-murao@math.tsukuba.ac.jp
web: <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~t-murao/>

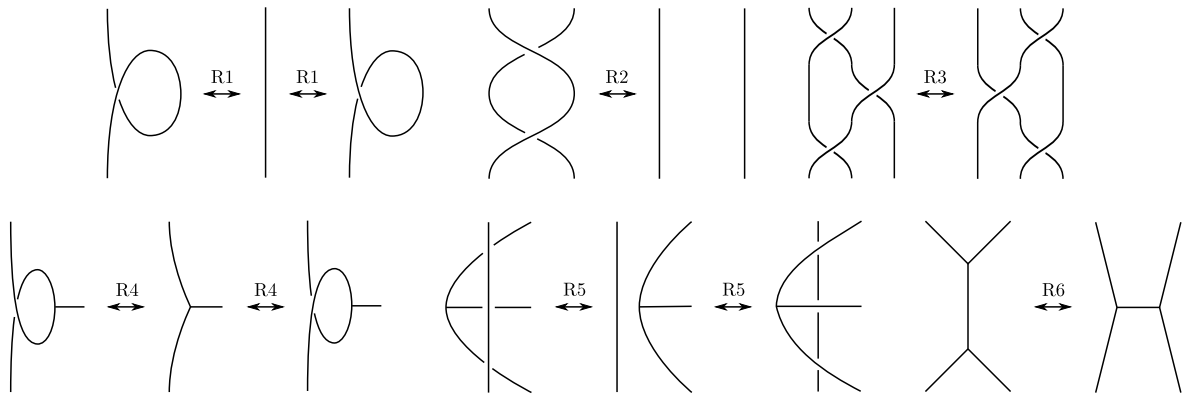


図 2: Reidemeister 変形.

本稿では、ハンドル体結び目のダイアグラム D に対して、 D のアーク全体の集合を $A(D)$ で表す。また、任意の $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して、 $\mathbb{Z}_m := \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ と定める。

H, H' をそれぞれ種数 g, g' ($g' < g$) のハンドル体結び目とする。このとき、 H のメリディアン円板 $\Delta_i (1 \leq i \leq l)$ が存在して、任意の $i, j (i \neq j)$ に対して $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ かつ $H - \bigcup_{i=1}^l \text{intNbd}(\Delta_i) \cong H'$ を満たすとき、 H' を H の **constituent** ハンドル体結び目といい、 $H' < H$ で表す。また、 H のメリディアン円板の集合 $\{\Delta_1, \dots, \Delta_l\}$ が H の **cutting system** であるとは、任意の $i, j (i \neq j)$ に対して $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ かつ $H - \bigcup_{i=1}^l \text{intNbd}(\Delta_i) \cong O_{g-l}$ が成り立つことである。ここで、 O_0 は S^3 に埋め込まれた 3次元球体を表す。このとき、 H の **cutting 数** $\text{Cut}(H)$ を

$$\text{Cut}(H) := \min\{ l \mid \exists \{\Delta_1, \dots, \Delta_l\} : H \text{ の cutting system } \}$$

で定める。

注意 1.2. 定義から直ちに次が従う。

- $\text{Cut}(H) = g - \max\{ g' \mid \exists O_{g'} < H \}$ が成り立つ。
- 任意の種数 g ハンドル体結び目 H に対して、 $0 \leq \text{Cut}(H) \leq g$ が成り立つ。特に、 H が自明であることと $\text{Cut}(H) = 0$ であることは同値である。
- ハンドル体結び目 H のトンネル数を $t(H)$ と表すとき、 $t(H) = \min\{ i \mid H < O_{g+i} \}$ が成り立つ。

2. カンドルの G 族

本章ではまず初めに、カンドルの定義を復習する。

定義 2.1 ([5, 6]). 空でない集合 X が次を満たす二項演算 $*$: $X \times X \rightarrow X$ を持つとき、 X をカンドルという。

- 任意の $x \in X$ に対して、 $x * x = x$.
- 任意の $y \in X$ に対して、写像 $S_y : X \rightarrow X; x \mapsto x * y$ は全単射である。
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して、 $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.

ここで、カンドル X の型 (type) を

$$\text{type } X = \min\{n \in \mathbb{Z}_{>0} \mid a *^n b = a \ (\forall a, b \in X)\}$$

で定義する. ただし, 任意の $i \in \mathbb{Z}$ および $a, b \in X$ に対して, $a *^i b := S_b^i(a)$ と定める. また, そのような自然数 n が存在しないとき, $\text{type } X := \infty$ と定める. 任意の有限カンドルは有限の型を持つことが知られている.

R を可換環, X を $R[t^{\pm 1}]$ -加群とする. このとき, 任意の $x, y \in X$ に対して, $x * y = tx + (1-t)y$ と定めると X はカンドルとなる. これを **Alexander** カンドルと呼ぶ.

次に, カンドルの G 族の定義を紹介する.

定義 2.2 ([3]). G を単位元 e を持つ群とする. 空でない集合 X が次を満たす二項演算の族 $*^g : X \times X \rightarrow X (g \in G)$ を持つとき, X をカンドルの G 族という.

- 任意の $x \in X$ 及び $g \in G$ に対して, $x *^g x = x$.
- 任意の $x, y \in X$ 及び $g, h \in G$ に対して, $x *^{gh} y = (x *^g y) *^h y$, $x *^e y = x$.
- 任意の $x, y, z \in X$ 及び $g, h \in G$ に対して, $(x *^g y) *^h z = (x *^h z) *^{h^{-1}gh} (y *^h z)$.

R を環, G を単位元 e を持つ群, X を右 $R[G]$ -加群とする. ここで, $R[G]$ は G の R 上の群環を表す. このとき, 任意の $x, y \in X$, $g \in G$ に対して $x *^g y = xg + y(e-g)$ と定めると $(X, \{*\}_{g \in G})$ はカンドルの G 族となる [3]. これを **Alexander** カンドルの G 族という. $(X, *)$ をカンドル, $m := \text{type } X$ とする. このとき, 任意の $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $(X, \{*\}_{i \in \mathbb{Z}_{km}})$ はカンドルの \mathbb{Z}_{km} 族である [3]. 特に, X が Alexander カンドルのとき, $(X, \{*\}_{i \in \mathbb{Z}_{km}})$ を **Alexander** カンドルの \mathbb{Z}_{km} 族と呼ぶ.

3. カンドルの G 族彩色

本章では, ハンドル体結び目のダイアグラムに対して, カンドルの G 族による彩色を定義する. G を単位元 e を持つ群, D をハンドル体結び目 H のダイアグラムとする. このとき, D の G -flow とは, D の各交点及び頂点で図3の条件を満たす写像 $\phi : \mathcal{A}(D) \rightarrow G$ のことである. ここで, D の G -flow ϕ が自明であるとは, $\text{Im}(\phi) = \{e\}$ を満たすことである. 本稿では混同を避けるため, G の元をしばしば下線付きの文字で表す. G -flow ϕ の与えられたダイアグラム D を (D, ϕ) で表し, H の G -flowed ダイアグラムという. また, $\text{Flow}(D; G) := \{\phi \mid \phi : D \text{ の } G\text{-flow}\}$ と定める. また, D の G -flow は $\pi_1(S^3 - H)$ から G への表現と同一視できる.

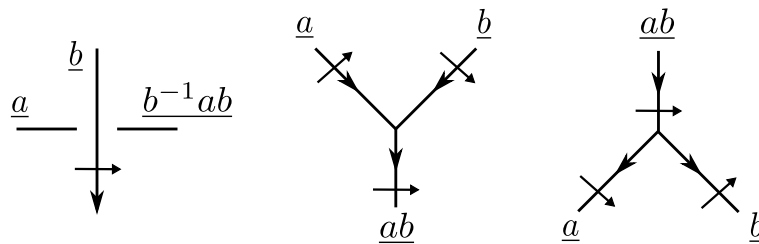


図 3: G -flow.

D をハンドル体結び目 H のダイアグラムとし, D' を D から1回の R1–R6 変形により得られるダイアグラムとする. このとき, 任意の $\phi \in \text{Flow}(D; G)$ に対して, 変形を施した場所以外では ϕ と一致するような $\phi' \in \text{Flow}(D'; G)$ が唯一つ存在する. したがって, $\#\text{Flow}(D; G)$ はハンドル体結び目 H の不変量となる. また, この ϕ' を ϕ の付随 G -flow といい, (D', ϕ') を (D, ϕ) の付随 G -flowed ダイアグラムという.

X をカンドルの G 族とし, (D, ϕ) をハンドル体結び目の G -flowed ダイアグラムとする. このとき, (D, ϕ) の X -彩色とは, (D, ϕ) の各交点及び頂点で図4の条件を満たす写像 $C: \mathcal{A}(D, \phi) \rightarrow X$ のことである. ここで, (D, ϕ) の X -彩色 C が自明であるとは, C が定値写像であることである. また, $\text{Col}_X(D, \phi) := \{C \mid C: (D, \phi) \text{ の } X\text{-彩色}\}$ と定める. D の G -flow ϕ が自明彩色 G -flow であるとは, 任意のカンドルの G 族 Y に対して, (D, ϕ) の任意の Y -彩色が自明であることである. また, $\text{Flow}_{\text{trivial}}(D; G) := \{\phi \in \text{Flow}(D; G) \mid \phi: \text{自明彩色 } G\text{-flow}\}$ と定める. なお, X が Alexander カンドルの G 族かつ体のとき, $\text{Col}_X(D, \phi)$ は X 上のベクトル空間となることが知られている.

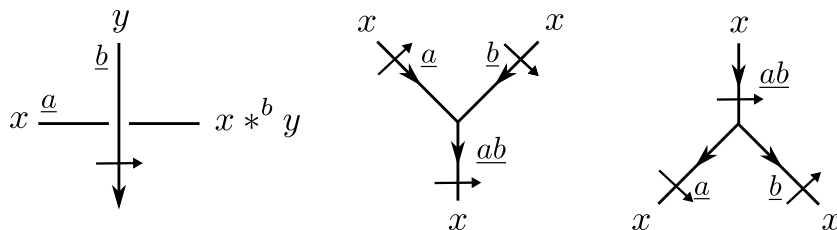


図 4: カンドルの G 族彩色.

命題 3.1 ([3]). X をカンドルの G 族とし, (D, ϕ) をハンドル体結び目の G -flowed ダイアグラム, (D', ϕ') を (D, ϕ) の付随 G -flowed ダイアグラムとする. このとき, 任意の $C \in \text{Col}_X(D, \phi)$ に対して, 変形を施した場所以外では C と一致するような $C' \in \text{Col}_X(D', \phi')$ が唯一つ存在する.

命題 3.1 より, $\#\text{Col}_X(D, \phi) = \#\text{Col}_X(D', \phi')$ を得る.

補題 3.2. (D, ϕ) をハンドル体結び目の G -flowed ダイアグラムとする. このとき, 任意のカンドルの G 族 X に対して, $\#\text{Col}_X(D, \phi) \geq \#X$ が成り立つ. 特に, 自明なハンドル体結び目の G -flowed ダイアグラム (O_g, ϕ) に対して, $\#\text{Col}_X(O_g, \phi) = \#X$ が成り立つ.

例 3.3. 種数 g の自明ハンドル体結び目 O_g の図5で表されるダイアグラムを同じく O_g で表す. このとき, 任意のカンドルの G 族 X 及び O_g の任意の G -flowed ダイアグラム (O_g, ϕ) に対して, $\#\text{Col}_X(O_g, \phi) = \#X$ を示す. まず, O_g の任意の G -flow ϕ は $a_i \in G$ ($i = 1, \dots, g$) と G の単位元 e を用いて図5のように表せる. 次に, (O_g, ϕ) の X -彩色を考える. 最も左側のループに $x \in X$ を対応させた다고すると, 残りのアークに対応する X の元は図5のように一意に定まる. したがって, $\#\text{Col}_X(O_g, \phi) = \#X$ である.

4. 主結果

本章では, constituent ハンドル体結び目が満たすべき必要条件及び cutting 数に関する評価式を与える.

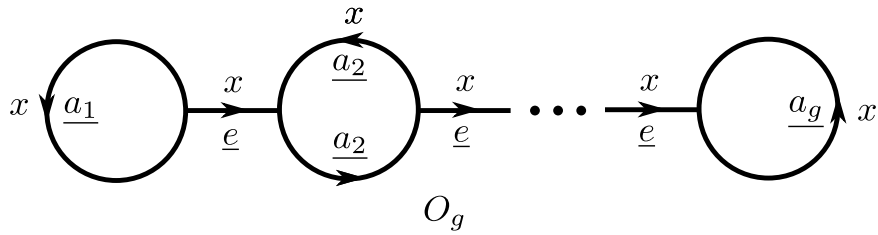


図 5: 自明ハンドル体結び目 O_g .

定理 4.1. H, H' をそれぞれ種数 g, g' ($g' < g$) のハンドル体結び目, D を H のダイアグラム, (D', ϕ') を H' の G -flowed ダイアグラムとする. X を Alexander カンドルの G 族かつ体とするととき, 次が成り立つ.

- (1) H' が H の constituent ハンドル体結び目であるとき, ある $\phi \in \text{Flow}(D; G)$ が存在して, $\dim_X \text{Col}_X(D', \phi') - \dim_X \text{Col}_X(D, \phi) \leq g - g'$ が成り立つ.
- (2) $g - \log_{|G|} \#\text{Flow}_{\text{trivial}}(D; G) \leq \text{Cut}(H)$.

5. 例

例 5.1. K, H をそれぞれ図6で表されるハンドル体結び目とする (K は結び目 8_{18} , H は種数2のハンドル体結び目 $5_1[4]$ である). K の \mathbb{Z}_2 -flowed ダイアグラム (D', ϕ') 及び H のダイアグラム D を図6のように与える. また, $X := \mathbb{Z}_3[t^{\pm 1}]/(t+1)$ とおくと, X は Alexander カンドルの \mathbb{Z}_2 族かつ体であり, $\dim_X \text{Col}_X(D', \phi') = 3$ である. 一方, 任意の $\phi \in \text{Flow}(D; \mathbb{Z}_2)$ に対して, $\dim_X \text{Col}_X(D', \phi') = 1$ が成り立つ. したがって, 任意の $\phi \in \text{Flow}(D; \mathbb{Z}_2)$ に対して $\dim_X \text{Col}_X(D', \phi') - \dim_X \text{Col}_X(D, \phi) = 1$ であり, 定理 4.1(1) より, K は H の constituent ハンドル体結び目ではない.

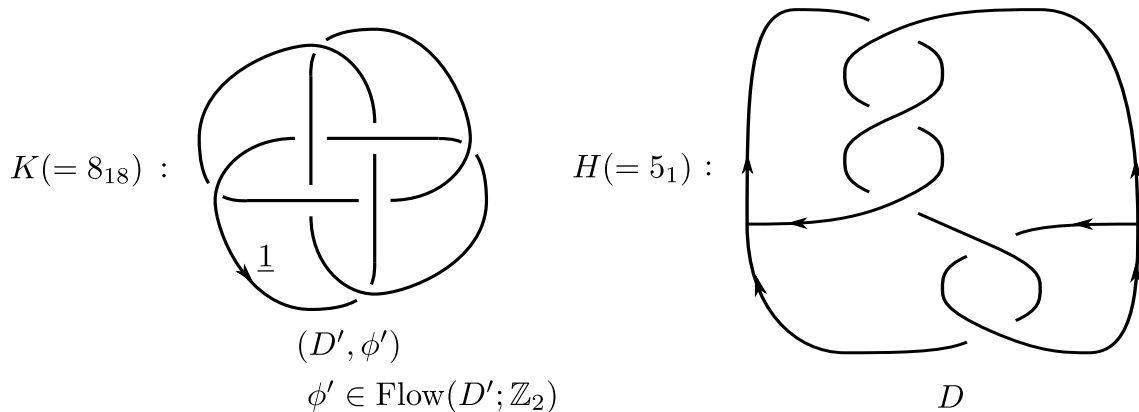


図 6: ハンドル体結び目 K, H .

例 5.2. H_g を図7で表される種数 g ハンドル体結び目とし, D_g をそのダイアグラムとする. $X := \mathbb{Z}_2[t^{\pm 1}]/(t^2 + t + 1)$ とおくと, X は Alexander カンドルの \mathbb{Z}_3 族かつ体である. このとき, 任意の非自明な D_g の \mathbb{Z}_3 -flow ϕ に対して, (D_g, ϕ) の非自明な X -彩色が存在する. すなわち, $\#\text{Flow}_{\text{trivial}}(D_g; \mathbb{Z}_3) = \#\{\phi : \text{trivial } \mathbb{Z}_3\text{-flow}\} = 1$ が成り立つ. したがって, 定理 4.1(2) より, $g \leq \text{Cut}(H_g)$ である. 以上より, $\text{Cut}(H_g) = g$ を得る.

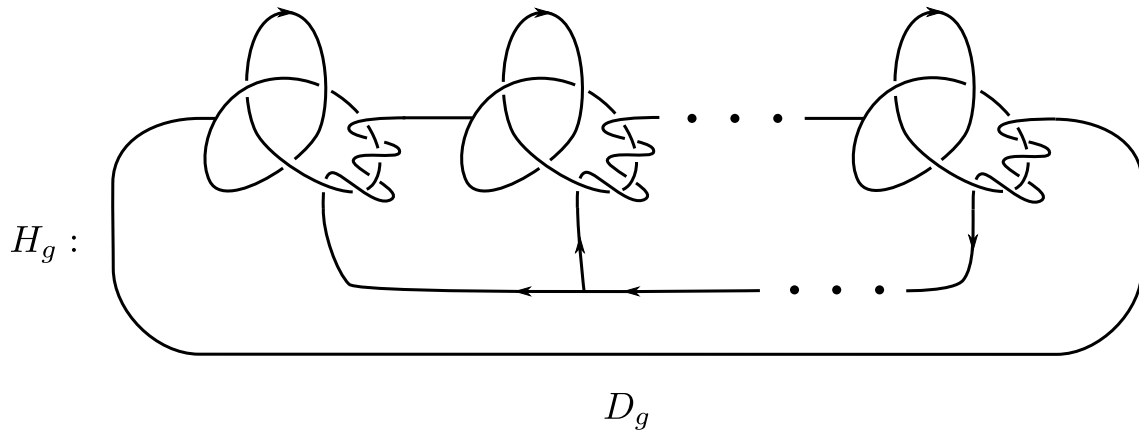


図 7: 種数 g ハンドル体結び目 H_g .

参考文献

- [1] A. Ishii, *Moves and invariants for knotted handlebodies*, *Algebr. Geom. Topol.* **8**(2008), 1403–1418.
- [2] A. Ishii, *The Markov theorems for spatial graphs and handlebody-knots with Y -orientations*, *Internat. J. Math.* **26**(2015), 1550116, 23 pp.
- [3] A. Ishii, M. Iwakiri, Y. Jang, K. Oshiro, *A G -family of quandles and handlebody-knots*, *Ill. J. Math.* **57**(2013), 817–838.
- [4] A. Ishii, K. Kishimoto, H. Moriuchi and M. Suzuki, *A table of genus two handlebody-knots up to six crossings*, *J. Knot Theory Ramifications* **21**(2012), 1250035, 1–9.
- [5] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, *J. Pure Appl. Alg.* **23**(1982), 37–65.
- [6] S. V. Matvee, *Distributive groupoids in knot theory*, *Mt. Sb. (N.S.)* **119(161)**(1982), 78–88.