

# A relation between biquandle coloring and quandle coloring

石川 勝巳（京都大学数理解析研究所）<sup>†</sup>

田中 心（東京学芸大学教育学部）<sup>‡</sup>

## 概要

カンドルやその一般化であるバイカンドルは結び目理論と非常に相性が良く、これらを用いることで様々な不変量を得ることができる。本稿では、バイカンドル彩色とカンドル彩色との間に 1 対 1 の対応があること、さらにそれが図式的に綺麗な形で得られることを紹介する。また、これに伴い、多くのバイカンドル不変量がカンドル不変量へと帰着されるということを示す。

## 1 イントロダクション

結び目や曲面結び目の研究に於ける結び目群の重要性は改めて述べるまでもないであろう。例えば有限群への表現の数は古典的な（曲面）結び目の不変量として有用である。ところで結び目群を diagram を用いて表示すると（Wirtinger 表示）、出てくる関係式は共役をとるという演算のみを用いて書くことができるのであった。すなわち、結び目群を考える上で積演算は重要ではないのである。このような観点で群を共役演算に着目して一般化した代数がカンドルと呼ばれるものである。

結び目群の他の群への表現の一般化として、diagram に対するカンドル彩色が定義され、例えばその数（彩色数）は（曲面）結び目の不変量である。カンドル彩色では各交点のまわりで over-arc に同じ色が塗られるが、ここで交点の上側を通った時も色が変わるというようにカンドルの公理を一般化することにより、バイカンドルと呼ばれる代数が定義される。バイカンドルからも様々な不変量が定義されるが、そもそもバイカンドルはカンドルの一般化であったのだから、カンドル不変量よりも精密な、もしくは本質的に新しい不変量が得られるのではないかと、という期待が持てる。実際、virtual knot であって、カンドルでは区別できないがバイカンドルを用いることで区別できるというような例が幾つも見つかっている。ところが、classical な結び目や曲面結び目に対するバイカンドル不変量の計算結果を見てみると、カンドル不変量の計算結果として見たことがあるようなものばかり出てきており、本質的に新しい不変量が得られているのかはわからなかった。

本稿では主結果として、バイカンドル彩色とカンドル彩色の間には 1 対 1 の対応があるということの説明をしたい。より具体的には、バイカンドル  $X$  に対してカンドル  $Q(X)$  が定義され、 $X$ -彩色の集合と  $Q(X)$ -彩色の集合の間には 1 対 1 の対応があること、さらにこの対応が図式的に綺麗な形で描き表されることを紹介する。このことから、多くのバイカンドル不変量がカンドル不変量へと帰着されることが期待できる： $X$ -彩色を用いて得られる不変量をこの対応によって  $Q(X)$ -彩色の言葉で書き直せば、それは  $Q(X)$  を用いた何らかの不変量と解釈できるはずだ、というわけである。実際、バイカンドルの彩色数やコサイクル不変量、ホモトピー不変量といった比較的良好に知られた不変量はカンドルの不変量に帰着されることもわかった。バイカンドル不変量はこれで全て

<sup>†</sup>〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学数理解析研究所  
e-mail: katsumi@kurims.kyoto-u.ac.jp

<sup>‡</sup>〒 184-8501 小金井市貫井北町 4-1-1 東京学芸大学教育学部  
e-mail: kotanaka@u-gakugei.ac.jp

かというとはよくわからないが、少なくともバイカンドルを用いて新しい情報を得るのはかなり難しそうだと言って良いと思われる。

本稿の構成について説明しておく。まず第2節でカンドルやバイカンドルについて復習した後、第3節で今回の主結果を紹介する。ここでは主定理の証明に代えて、彩色の対応を具体的に示す。この結果を用いて、第4節では種々のバイカンドル不変量がどのようにカンドル不変量へと帰着されるかを説明する。

## 2 定義

ここではカンドルやバイカンドル、これらによる彩色について基本的な定義を復習する。詳細は[2],[3]など（日本語では[6],[10]など）を参照されたい。

カンドルとは集合  $Q$  とその上に定義された二項演算  $*$  の組  $(Q, *)$  であって、次の条件 (Q1)~(Q3) を満たすもののことである：

- (Q1) 任意の  $x \in Q$  に対し、 $x * x = x$ .
- (Q2) 任意の  $y \in Q$  に対し、写像  $\bullet * y : Q \ni x \mapsto x * y \in Q$  は全単射。
- (Q3) 任意の  $x, y, z \in Q$  に対し、 $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ .

カンドルはもともと1次元結び目の研究の中で出てきたもので、これらの条件 (Q1)~(Q3) は結び目の Reidemeister 変形 R1~R3 にそれぞれ対応している。

**例 2.1** (conjugation quandle).  $G$  を群とする。  $Q := G$  上の演算  $*$  を  $x * y = y^{-1}xy$  で定めると  $(Q, *)$  はカンドルとなる。

続いて、バイカンドルとは集合  $X$  とその上の2つの二項演算  $\underline{*}, \bar{*}$  の3つ組  $(X, \underline{*}, \bar{*})$  であって、次の条件 (BQ1)~(BQ3) を満たすもののことである：

- (BQ1) 任意の  $x \in X$  に対し、 $x \underline{*} x = x \bar{*} x$ .
- (BQ2) 写像  $X \times X \ni (x, y) \mapsto (y \bar{*} x, x \underline{*} y) \in X \times X$  は全単射。  
また、任意の  $y \in X$  に対し、2つの写像  $\bullet \underline{*} y, \bullet \bar{*} y : X \rightarrow X$  はどちらも全単射。
- (BQ3) 任意の  $x, y, z \in X$  に対し、

$$\begin{aligned} (x \underline{*} y) \underline{*} (z \underline{*} y) &= (x \underline{*} z) \underline{*} (y \bar{*} z), \\ (x \underline{*} y) \bar{*} (z \underline{*} y) &= (x \bar{*} z) \underline{*} (y \bar{*} z), \\ (x \bar{*} y) \bar{*} (z \bar{*} y) &= (x \bar{*} z) \bar{*} (y \underline{*} z). \end{aligned}$$

**例 2.2.**  $(Q, *)$  をカンドルとする。  $X = Q$  とし、その上の二項演算を  $x \underline{*} y = x * y, x \bar{*} y = x$  と定めると、  $(X, \underline{*}, \bar{*})$  はバイカンドルとなる。

次に、今回の研究の主題である彩色について復習する。  $D$  を絡み目  $L$  の diagram とする。本稿の内容は曲面絡み目でも全く同様に成り立つが、説明等の簡略化のため、ここでは1次元絡み目だけを扱うことにする。カンドル  $Q$  に対し、  $D$  の  $Q$ -彩色とは、写像  $C : \{D \text{ の arc} \} \rightarrow Q$  であって、各交点のまわりで

$$C(z) = C(x) * C(y)$$

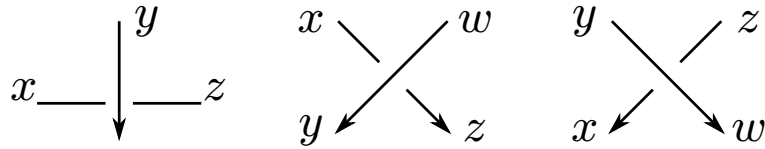


図 1: 左図では under arc の向きは彩色の条件には無関係である。

という条件を満たすものことである。ただし交点のまわりの arc  $x, y, z$  は図 1 の左図のようなものとする。同様にバイカンドル  $X$  に対し、 $D$  の  $X$ -彩色とは、写像  $\mathcal{C} : \{D \text{ の semi-arc} \} \rightarrow X$  であって、各交点のまわりで

$$\mathcal{C}(z) = \mathcal{C}(x) * \mathcal{C}(y), \quad \mathcal{C}(w) = \mathcal{C}(y) * \mathcal{C}(x)$$

という条件を満たすものことである。ここで **semi-arc** とは diagram から交点（とその近傍）を除いたものの各連結成分のことであり、diagram を 4 価グラフとみなしたときの辺にあたるもの、といってもよい。 $x, y, z, w$  は図 1 の右側に示されているような semi-arc である。 $Q$ -彩色の集合、 $X$ -彩色の集合をそれぞれ  $\text{Col}_Q(D), \text{Col}_X(D)$  と書くことにする。

彩色の集合  $\text{Col}_Q(D), \text{Col}_X(D)$  は（適切な意味で）それ自体が絡み目の不変量である。より正確には、同値な絡み目を表す diagram  $D$  および  $D'$  と、それらを繋ぐ Reidemeister 変形の列が与えられ、 $\text{Col}_Q(D)$  と  $\text{Col}_Q(D')$ ,  $\text{Col}_X(D)$  と  $\text{Col}_X(D')$  の間の全単射が与えられる。従って例えば  $Q$  が有限カンドルのとき、彩色の数（彩色数）は絡み目の不変量となっているし、数を数える際に重みをつけて数えるとさらに精密な不変量を得ることができる。

例 2.1 に挙げた conjugation quandle  $Q = G$  の場合には、カンドル彩色を与えることと群準同型  $\pi_1(S^3 \setminus L) \rightarrow G$  を与えることは同値であることが見て取れるだろう。従ってカンドルというのは群を「共役をとる」という演算について一般化したものであるといえることができる。同様に例 2.2 を考えることにより、バイカンドルはカンドルを一般化したものである、といえることができる。バイカンドルの定義は一見煩雑に見えるかもしれないが、「交点の上側を通る時にも色が変わる」という形でカンドル彩色を拡張しようとしたとき必要とされる条件が (BQ1)~(BQ3) であり、それらを課した代数がバイカンドルである。この意味では、バイカンドル彩色はカンドル彩色の一般化である、という言い方も可能であろう。本稿の目的は、この一般化が本質的でないことを主張するものである。

**註 2.3.** (バイ)カンドル彩色の定義として、上記のように diagram をそのまま用いる以外に、基本 (バイ)カンドルを用いる方法もある。すなわち、 $D$  に対して基本 (バイ)カンドル  $Q(D)$  ( $BQ(D)$ ) というものが定義され、これから (バイ)カンドルへの準同型のことを彩色と呼ぶのである。 $Q(D)$  も  $BQ(D)$  も  $L$  に対する不変量であることが知られているが、一般にこれら自体を比較することは難しいため、彩色というわかりやすい形で情報を引き出してきているのである。

ここで注意しなくてはならないのが、 $Q(D)$  の方はトポロジカルな定義が知られているのに対し、 $BQ(D)$  についてはそのような定義が知られていないということである。上で Reidemeister 変形から全単射  $\text{Col}_Q(D) \rightarrow \text{Col}_Q(D')$  が得られると説明したが、 $Q(D)$  のトポロジカルな定義を用いれば、“トポロジカルに同じ”変形を表す Reidemeister 変形からは同じ全単射が得られることがわかる。一方で、バイカンドル彩色の場合はそのようなことはわかっておらず、具体的に Reidemeister 変形を与えるごとに何かしら全単射が得られる、としか言いようがなかった。ところが今回の結果（例えば定理 4.4）を  $Q(D)$  のトポロジカルな定義と併せて考えると、バイカンドル彩色の変形も

トポロジカルな変形のみから得られるということがわかる。ただしこのことが非自明な事実であるということだけは重ねて強調しておきたい。

### 3 彩色の間の 1 対 1 対応

$X = (X, *, \bar{*})$  をバイカンドルとする。このとき集合  $Q(X) = X$  上に二項演算  $*$  を

$$x * y = (x \bar{*} y) \bar{*}^{-1} y$$

によって定義する。ここで  $\bullet \bar{*} y$  が  $X$  上の全単射であったことに注意し、 $\bullet \bar{*}^{-1} y$  がこの逆写像となるように  $\bar{*}^{-1}$  を定めている。すると  $Q(X) = (Q(X), *)$  はカンドルとなることがわかる（証明は [1] 参照のこと。この定義自体は集合論的 Yang-Baxter 方程式の世界では structure rack という形で知られていたものである（例えば [7] 等））。このカンドル  $Q(X)$  と元のバイカンドル  $X$  の彩色の間に 1 対 1 の対応が存在する、というのが今回の主結果である：

**定理 3.1.**  $D$  を絡み目  $L$  の *diagram* とする。このとき全単射

$$\Psi : \text{Col}_{Q(X)}(D) \rightarrow \text{Col}_X(D)$$

が存在する。

このことから、ただちに次の結果が得られる。

**系 3.2.**  $X$  による彩色数は  $Q(X)$  による彩色数に等しい。

なお、定理 3.1 において、全単射  $\Psi$  は *diagram* の  $\mathbb{R}^2$  内での Reidemeister 変形に対して自然である。

**註 3.3.** [11] の結果を今考えている状況に適用すると、 $X$  から得られる braid 群の表現は  $Q(X)$  から得られるものに共役である、ということがわかる。このことから系 3.2 の結果は得られる他、[11] に書かれている証明を読み解くことで、閉 braid の形で与えられた絡み目については定理 3.1 の 1 対 1 対応も得ることができるが、一般の *diagram* に対しては通用せず、上の自然性もわからない。本稿での目標は、一般の *diagram* でも通用するような、図式的にも綺麗な対応を与えること、ということになる。

本稿では定理 3.1 の細かな証明には立ち入らず、対応  $\Psi : \text{Col}_{Q(X)}(D) \rightarrow \text{Col}_X(D)$  及びその逆対応  $\Phi : \text{Col}_X(D) \rightarrow \text{Col}_{Q(X)}(D)$  の作り方を紹介するにとどめる。

#### 3.1 $\Psi : \text{Col}_{Q(X)}(D) \rightarrow \text{Col}_X(D)$

まず、 $D$  に対してそのある種の 2 重化にあたる *diagram*  $W(D)$  を、 $D$  の向きと交点の上下を共に逆にした *diagram*  $-D^\vee$  を、 $D$  の後ろ側に配置することによって定める。このとき  $D$  の法方向にずらして  $-D^\vee$  を配置することにする（図 2）。このようにして定めた  $W(D)$  は、 $D$  の  $Q(X)$ -彩色を“二重化”すると  $W(D)$  の  $X$ -彩色が得られる、という著しい性質を持っている。 $D$  の各辺に与えられた彩色  $x \in Q(X)$  を、（一旦交点のまわりは無視して）対応する  $W(D)$  の 2 本の semi-arc にも与え、さらに  $x \in X$  とみなすと、交点のまわりでは図 2 の右下のようによく整合性が取れ、 $W(D)$  の  $X$ -彩色が得られるのである。逆に、 $W(D)$  の  $X$ -彩色であって、交点のまわりを除いたそれぞれの並行する 2 本の semi-arc に同じ彩色が与えられているようなもの（このようなもの全

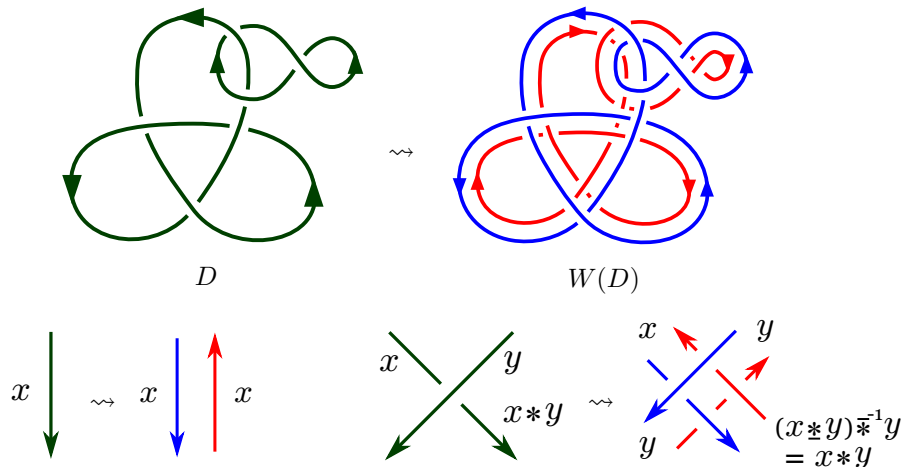


図 2: 2重化  $W(D)$

体の集合を  $\text{Col}_X^{(=)}(W(D))$  と書く) は、ある  $D$  の  $Q(D)$  を 2重化したものとみなせることもわかる。纏めると、 $\text{Col}_{Q(X)}(D)$  と  $\text{Col}_X^{(=)}(W(D))$  との間に自然な 1 対 1 対応が存在することがわかったことになる。

以上の準備の下、 $C \in \text{Col}_{Q(X)}(D)$  に対し  $\Psi(C) \in \text{Col}_X(D)$  を次のように定義する (図 3) :

**STEP1**  $C$  を上記のように 2重化し、 $W(D)$  の  $X$ -彩色を得る。

**STEP2**  $W(D)$  はトポロジカルには  $D$  と  $-D^v$  それぞれの表す絡み目に split していることを思い出し、これを diagram 上で引き離す。逆対応  $\Phi$  を作る際の都合上、 $-D^h$  を後ろ側にめくるようにして引き離すことにする。 $D$  を水平方向に反転し、向きを逆にしたものを  $-D^v$  と書くことにすると、この操作で  $W(D)$  は  $D \sqcup -D^v$  に変わり、それに伴い  $D \sqcup -D^v$  の  $X$ -彩色が得られる。

**STEP3**  $-D^v$  は無視し、 $D$  上に得られた  $X$ -彩色を  $\Psi(C)$  とおく。

これで対応  $\Psi : \text{Col}_{Q(X)}(D) \rightarrow \text{Col}_X(D)$  が得られた。

**註 3.4.** 上の「STEP2」は別段の注意が必要である。ここでは引き離しを表すような Reidemeister 変形の列を取ってきて、それに伴って彩色が変化していくが、註 2.3 でも述べたように、バイカンドル彩色ではこの変化の仕方が変形の取り方に依らないことは極めて非自明である。講演では省略したこの部分の証明について、少し詳しく述べておこう (正確なところは [5] を参照されたい)。

まず上では任意の形で引き離しを行うような記述を行ったが、特にそのようなものを 1 つ固定することを考えよう。例えば、diagram を水平方向に、交点や極大・極小点を通らないようスライスし、スライスした帯状の部分のまわりだけを動かして引き離すということを考えてみる。ここで引き離さなかった部分は後から既に引き離したところへ合流させることができるので、これで  $W(D)$  から  $D \sqcup -D^h$  への対応はひとまずできたことになるが、このような形に限定しても  $\Psi$  の構成や定理 3.1 の証明には十分である。そのまま進んで定理 4.2 まで証明すると、これから  $\Psi$  の  $\mathbb{R}^2$  内での Reidemeister 変形に対する自然性が従う。すると、 $\Psi$  や  $\Phi$  を通して見ることで、STEP2 でのバイカンドル彩色の対応の well-defined 性はこれらの彩色に対応する  $Q(X)$ -彩色の対応の well-defined 性に帰着されるが、カンドル彩色は註 2.3 でも触れたようにトポロジカルな変形の仕方にも依存する形で変化するので、こちらの well-defined 性はほとんど明らかである。

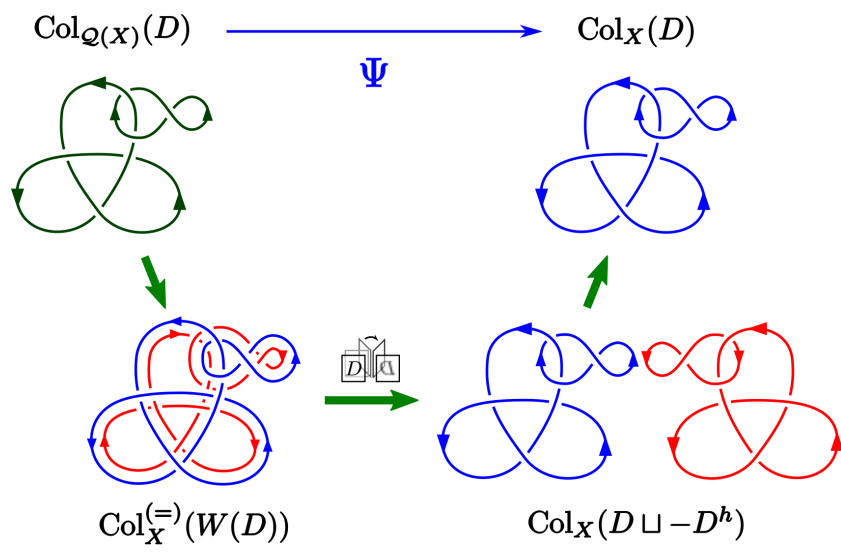


図 3:  $\Psi : \text{Col}_{Q(X)}(D) \rightarrow \text{Col}_X(D)$

### 3.2 $\Phi : \text{Col}_X(D) \rightarrow \text{Col}_{Q(X)}(D)$

簡単に言えば、 $\Phi$  は前節の構成をただ逆に辿ることによって作られるが、 $\Psi$  の構成の STEP3 をどう逆に辿るのか、というのは悩みどころであろう。そもそも、STEP3 では  $-D^h$  を完全に無視してしまっているため、ここで情報が落ちてしまっているようにも見える。

ここで  $-D^h$  は  $D$  を水平方向に鏡写しにして、向きを逆にした diagram であった。この  $-D^h$  に関して、 $D$  の (パイ) カンドル彩色を鏡写しにすると  $-D^h$  の (パイ) カンドル彩色が得られる、という性質があったことを思い出そう (図 4 を見よ)。彩色  $C \in \text{Col}_X(D)$  を鏡写しにしたものを  $C^m \in \text{Col}_X(-D^h)$  と書くことにする。

$\Psi$  の構成の STEP2 では二重化した  $W(D)$  の彩色を引き離して  $D \sqcup -D^h$  の彩色を得たが、実はこうしてできた彩色は左右対称な形、すなわちある  $C_D \in \text{Col}_X(D)$  を用いて  $C_D \sqcup C_D^m \in \text{Col}_X(D \sqcup -D^h)$  と書けるような彩色となっていることがわかる。逆に、左右対称な彩色から STEP2 の逆変形 (後ろ側へ本を閉じるような変形) を行ってできた  $W(D)$  の彩色は、ある  $D$  の  $Q(D)$ -彩色を 2 重化してできるような  $X$ -彩色になっていることもわかるので、結局、STEP2 では全単射

$$\text{Col}_X^{(=)}(W(D)) \rightarrow \{C_D \sqcup C_D^m \in \text{Col}_X(D \sqcup -D^h) \mid C_D \in \text{Col}_X(D)\}$$

を作っていたことになる。従って、STEP3 では左右対称な彩色の一方を消してただで情報落ちておらず、 $\Psi$  の構成の逆を辿ることで対応  $\Phi : \text{Col}_X(D) \rightarrow \text{Col}_{Q(X)}(D)$  を作ることができる。具体的には、次のようにすればよい。



図 4:  $-D^h$  には鏡写しの彩色が入る。

**STEP1**  $C \in \text{Col}_X(D)$  を鏡写しにして、彩色  $C \sqcup C^m \in \text{Col}_X(D \sqcup -D^h)$  を得る。

**STEP2**  $-D^h$  をひっくり返して  $D$  の後ろ側へ持っていき、 $W(D)$  とその上の  $X$ -彩色を得る。

**STEP3** こうして得られた  $W(D)$  上の彩色は、各並行する 2 辺に同じ色を与えるようなものになっている ( $\text{Col}_X^{(=)}(W(D))$  の元である) ので、 $D$  の  $Q(X)$ -彩色とみなすことができる。これを  $\Phi(C) \in \text{Col}_{Q(X)}(D)$  とおく。

構成の仕方から  $\Phi$  は  $\Psi$  の逆対応であり、 $\Psi$  が全単射であることが示された。

**註 3.5.** 講演でも紹介したように、対応  $\Phi$  は、各 semi-arc を外側の領域まで引っ張り出してきたときの彩色 ( $\in X$ ) を読んで  $Q(X)$  の元とみなす、という方法でも構成でき、バイカンドル彩色からカンドル彩色を得るということだけが目的ならばこの方法の方が簡明なのであるが、これが上記の構成と一致していることや  $\Psi$  の逆対応を与えていることは自明ではない (因みに、このことについても綺麗な図式的説明がつく。) し、以下では主に  $\Psi$  の対応を用いて不変量の関係を見るので、ここでは省略させて頂く。

## 4 不変量の間関係

### 4.1 分類空間と彩色数の精密化

ここでは (バイ) カンドルコサイクル不変量やホモトピー不変量について、簡単に復習しておく。カンドルコサイクル不変量については第 2 節でも挙げた [2],[6],[10] などがわかりやすく、カンドルホモトピー不変量については原論文 [8],[9] を参照されたい。

バイカンドル  $X$  に対し、そのバイラック空間  $B^{BR}X$  を次のような CW 複体として定める：

$$B^{BR}X = \bigsqcup_{n \geq 0} [0, 1]^n \times X^n / \sim.$$

但し  $X$  は離散集合とみなしており、 $\sim$  は次のように定義される関係である：

$$\begin{aligned} & (t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) \\ & \sim (t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n), \\ & (t_1, \dots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n) \\ & \sim (t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n, x_1 * x_i, \dots, x_{i-1} * x_i, x_{i+1} * x_i, \dots, x_n * x_i). \end{aligned}$$

要は、 $X^n$  でラベル付けされた  $n$ -セルを、ここで定めたような特性写像で次々に張り付けていった空間が  $B^{BR}X$  である。さらに、 $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$  であって  $x_i = x_{i+1}$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) をみたすようなものでラベル付けされた各  $n$ -セルに対し、これをつぶすように  $(n+1)$ -セルを張り付けることで得られる空間をバイカンドル空間といい、 $B^{BQ}X$  と表す。特にカンドル  $Q$  は例 2.2 の意味でバイカンドルとみなすことができるが、このバイカンドルのバイラック空間、バイカンドル空間をそれぞれ  $Q$  のラック空間、カンドル空間といい、 $B^{RQ}, B^{QQ}$  と表す。

絡み目  $L$  の diagram  $D$  とそのバイカンドル彩色  $C \in \text{Col}_X(D)$  が与えられると、バイカンドル空間のホモトピー群の元  $\Xi(C) \in \pi_2(B^{BQ}X)$  が与えられる。詳しい定義は省略するが、 $D$  は  $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  内に描かれているものと思い、 $D$  の region (補領域) を  $B^{BQ}X$  の唯一の 0-セルに、semi-arc を 1-セルに、交点を 2-セルに送るような写像  $S^2 \rightarrow B^{BQ}X$  が彩色の情報を用いて構成され、そのホモトピー類が  $\Xi(C)$  である。 $\mathbb{R}^2$  内の Reidemeister 変形で  $D$  を動かしても、対応す

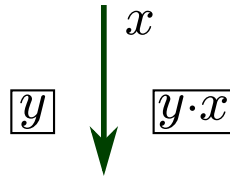


図 5:  $x \in X, y \in Y$ . ここではシャドー彩色を  $\square$  で囲んで表記している。

るホモトピー類  $\Xi(C)$  は不変であることが知られており、この写像  $\Xi: \text{Col}_X(D) \rightarrow \pi_2(B^{BQ}X)$  または ( $\#X < \infty$  を仮定したうえで) 群環の元

$$\Xi_X(D) := \sum_{C \in \text{Col}_X(D)} \Xi(C) \in \mathbb{Z}[\pi_2(B^{BQ}X)]$$

のことをバイカンドルホモトピー不変量と呼ぶ。  $X$  がカンドルの場合も同様にカンドルホモトピー不変量が定義される。

(バイ) カンドル空間の  $A$  値 2-コサイクル  $\phi$  が与えられると、Hurewicz 準同型  $h$  で  $\Xi_X(D)$  を送って  $\phi$  で evaluate することにより、(バイ) カンドルコサイクル不変量  $\Phi_\phi(D) \in \mathbb{Z}[A]$  が定義される。2-コサイクルは写像  $\phi: X \times X \rightarrow A$  であって、

$$\begin{aligned} \phi(y, z) - \phi(x, z) + \phi(x, y) - \phi(y \bar{*} x, z \bar{*} x) + \phi(x \bar{*} y, z \bar{*} y) - \phi(x \bar{*} z, y \bar{*} z) &= 0, \\ \phi(x, x, y) = \phi(x, y, y) &= 0 \end{aligned}$$

を満たすものとも定義することができ、彩色  $C$  に対する  $\Phi_\phi(C) = \phi \circ h \circ \Xi(C)$  の値も、diagram の各交点に対し  $\phi$  で彩色から定まる重みを与えて足し上げることでわかるので、コサイクル不変量の方がホモトピー不変量よりも遥かに計算は容易である。

(バイ) カンドル空間の基本群は  $\langle X \mid x(y \bar{*} x) = y(x \bar{*} y) \ (x, y \in X) \rangle$  と表示されるが、これを  $X$  の **associated group** と呼び、 $\text{As}(X)$  と表す。 $\text{As}(X)$  が右から作用する集合のことを  $X$ -set と言うが、特に  $\text{As}(X)$  自身は右からの積で作用が定められるので  $X$ -set となっている。 $Y$  を  $X$ -set とする。絡み目図式  $D$  の  $X$ -彩色  $C$  に加え、写像  $\mathcal{R}: \{D \text{ の region}\} \rightarrow Y$  であって、各 semi-arc に沿って図 5 のような条件を満たすものが与えられているとき、組  $(C, \mathcal{R})$  をシャドー  $(X, Y)$ -彩色と呼ぶ。写像  $\phi: Y \times X^n \rightarrow A$  で、ある条件を満たすもののことをシャドー  $n$ -コサイクルなどと呼ぶが、例えばシャドー 2-コサイクルがあるとシャドーコサイクル不変量と呼ばれる絡み目の不変量が得られることが知られている。これは  $D$  のシャドー彩色に対し、その各交点に  $\phi$  でシャドー彩色から定まる重みを与えて足し上げることによって定義されるが、(バイ) カンドル空間の言葉ではシャドーコサイクルは局所係数コサイクルに対応し、シャドーコサイクル不変量も写像  $S^2 \rightarrow B^{BQ}X$  で  $\phi$  を引き戻して基本類を evaluate したもの、という定義が可能である。特にホモトピー不変量は (シャドー) コサイクル不変量に対し普遍性を持つが、やはりシャドーコサイクル不変量の方がホモトピー不変量よりも実際の計算には適している。

註 4.1. (semi-)arc の彩色とどこか 1 か所の region の彩色を与えられたとき、全体のシャドー彩色が一意に決まるということが容易にわかる。以下では  $X$ -set として主に  $\text{As}(X)$  を考えるが、このとき特に  $D$  の非有界領域を単位元  $e \in \text{As}(X)$  で彩色するものが唯 1 つ存在する。

## 4.2 バイカンドル不変量 vs. カンドル不変量

前節で導入したシャドー彩色を含めて定理 3.1 の対応  $\Psi$  を見直してみよう。



そもそも対応  $\Psi : \text{Col}_{\mathcal{Q}(X)}(D) \rightarrow \text{Col}_X(D)$  は各 semi-arc の  $\mathcal{Q}(X)$ -彩色だけからその対応する  $X$ -彩色を定めるというものではなく、 $\mathcal{Q}(X)$ -彩色全体の情報が必要であった。この「全体の情報」がどのくらい必要か、という問いに答えるのが次の定理である。

**定理 4.2** (定理 3.1 の精密化). 写像  $\psi : \text{As}(\mathcal{Q}(X)) \times \mathcal{Q}(X) \rightarrow X$  で、 $\Psi$  を誘導するものが存在する。

説明が必要であろう。まず  $\mathcal{C} \in \text{Col}_{\mathcal{Q}(X)}(D)$  に対し、註 4.1 のようなシャドー  $(\mathcal{Q}(X), \text{As}(\mathcal{Q}(X)))$ -彩色  $(\mathcal{C}, \mathcal{R})$  を考える。各 semi-arc  $x$  について、その specified region (隣接する region の内、 $x$  の法ベクトルが指さない方) を  $D_x$  とするとき、定理 4.2 は、 $\Psi(\mathcal{C})(x)$  が  $x$  と  $D_x$  の色だけから決まること、すなわち  $\Psi(\mathcal{C})(x) = \psi(\mathcal{R}(D_x), \mathcal{C}(x))$  が成り立つことを主張している。「全体の情報」はシャドー彩色の情報で十分、ということになる。

定理 4.2 の写像  $\psi$  を用いて、写像  $\psi_{\text{As}} : \text{As}(\mathcal{Q}(X)) \rightarrow \text{As}(X)$  を次のように定義する：

$$\psi_{\text{As}}(e) = e, \quad \psi_{\text{As}}(gx) = \psi_{\text{As}}(g)\psi(g, x), \quad \psi_{\text{As}}(gx^{-1}) = \psi_{\text{As}}(g)\psi(gx^{-1}, x)^{-1}$$

( $g \in \text{As}(\mathcal{Q}(X)), x \in \mathcal{Q}(X)$ ). 複雑に見えるかもしれないが、シャドー彩色が  $g \in \text{As}(\mathcal{Q}(X))$  である region について、対応する  $X$ -彩色でのそのシャドー彩色が  $\psi_{\text{As}}(g)$  というように写像を定めると上のようになる。

**補題 4.3.**  $\psi_{\text{As}} : \text{As}(\mathcal{Q}(X)) \rightarrow \text{As}(X)$  は *well-defined* で、全単射。

但し、 $\psi_{\text{As}}$  は群準同型ではなく、ただの「写像」である。さらに、次が成り立つ：

**定理 4.4** (定理 3.1 のさらなる精密化). 写像  $\tilde{\psi} : \text{As}(\mathcal{Q}(X)) \times \mathcal{Q}(X) \rightarrow \text{As}(X) \times X$  を、 $\tilde{\psi}(g, x) = (\psi_{\text{As}}(g), \psi(g, x))$  で定める。このとき、 $\tilde{\psi}$  は全単射であり、さらに  $\Psi$  を誘導する。

最後の「誘導する」の意味は定理 4.2 と同じである。すなわち、semi-arc とその specified region の彩色を組にして考えたとき、カンドル彩色とバイカンドル彩色の間には完全に 1 対 1 の対応が存在するのである。 $\Psi$  はシャドーまで含めて考えると局所的な 1 対 1 対応である、という言い方もできよう。

さて、不変量の書き直しに移ろう。バイラック空間  $B^{BR}X$  の普遍被覆  $\widetilde{B^{BR}X}$  には  $B^{BR}X$  の CW 複体としての構造 (もしくはもっと強く  $\square$ -集合の構造) が持ち上がるが、このとき各  $n$ -セルは  $\text{As}(X) \times X^n$  でラベル付けされたものになっている ( $\pi_1(B^{BR}X) = \text{As}(X)$  であった)。これは  $B^R\mathcal{Q}(X)$  などでも同様である。そこで上の  $\tilde{\psi}$  と同様の写像 (同じ記号を用いる)

$$\tilde{\psi} : \text{As}(\mathcal{Q}(X)) \times \mathcal{Q}(X)^n \ni (g, x_1, \dots, x_n) \mapsto (\psi_{\text{As}}(g), \psi(g, x_1), \dots, \psi(g, x_n)) \in \text{As}(X) \times X^n$$

を考えると、これに対応するような写像  $\tilde{\psi} : \widetilde{B^R\mathcal{Q}(X)} \rightarrow \widetilde{B^{BR}X}$  を構成することができる。(バイ)カンドル空間についても同様である。定理 4.4 の全単射性などを用いると、次がわかる：

**補題 4.5.**  $\tilde{\psi} : \widetilde{B^R\mathcal{Q}(X)} \rightarrow \widetilde{B^{BR}X}$  及び  $\tilde{\psi} : \widetilde{B^Q\mathcal{Q}(X)} \rightarrow \widetilde{B^{BQ}X}$  はそれぞれ CW 複体間の同型である。特に  $n \geq 2$  に対し、

$$\pi_n(B^R\mathcal{Q}(X)) \cong \pi_n(B^{BR}X), \quad \pi_n(B^Q\mathcal{Q}(X)) \cong \pi_n(B^{BQ}X).$$

このホモトピー群の間の同型を  $\tilde{\psi}_*$  で表すことにする。この補題を用いて、定理 3.1 を (バイ)カンドル空間の言葉で記述すると、次のようになる。

定理 4.6.  $\mathcal{C} \in \text{Col}_{\mathcal{Q}(X)}(D)$  に対し、

$$\Xi(\Psi(\mathcal{C})) = \tilde{\psi}_* \Xi(\mathcal{C}) \in \pi_2(B^{BQ}X).$$

特に、 $X$  が有限バイカンドルのとき、

$$\Xi_X(D) = \tilde{\psi}_* \Xi_{\mathcal{Q}(X)}(D) \in \mathbb{Z}[\pi_2(B^{BQ}X)].$$

$\tilde{\psi}_*$  を通してホモトピー群を同一視すると、バイカンドルホモトピー不変量  $\Xi_X$  はカンドルホモトピー不変量  $\Xi_{\mathcal{Q}(X)}$  と全く同じもの、ということである。

ホモトピー不変量は (シャドー) コサイクル不変量に対して普遍性を持つものであったことから、バイカンドルを用いても (そう簡単には) 新しい不変量は得られそうにないということがわかると思う。少なくともバイカンドルコサイクル不変量がカンドルの不変量として書き直されることは定理 4.6 からわかるが、明示的には次のようになる。

定理 4.7.  $\phi: X \times X \rightarrow A$  をバイカンドル 2-コサイクルとする。このとき  $\phi$  の “引き戻し” である写像  $\psi^*\phi: \text{As}(\mathcal{Q}(X)) \times \mathcal{Q}(X) \times \mathcal{Q}(X) \rightarrow A$  は  $\mathcal{Q}(X)$  のシャドーカンドル 2-コサイクルであり、

$$\Phi_\phi(D) = \Phi_{\psi^*\phi}^{\infty=e}(D) \in \mathbb{Z}[A]$$

が成り立つ。

$\psi^*\phi: \text{As}(\mathcal{Q}(X)) \times \mathcal{Q}(X) \times \mathcal{Q}(X) \rightarrow A$  は  $(\psi^*\phi)(g, x, y) = \phi(\psi(g, x), \psi(g, y))$  と定義される。なお、定理の中の  $\infty = e$  は、非有界領域が  $e \in \text{As}(\mathcal{Q}(X))$  で彩色されるようなものだけを考慮して和を取ることを意味している。この定理により、バイカンドルコサイクル不変量はシャドーカンドルコサイクル不変量に帰着されたことになる。

註 4.8. 講演では先に定理 4.7 を紹介した。これは我々の研究の過程で明らかになった順序に従っている、というのもあるし、定理 4.7 を導くには定理 4.2 だけで十分である、という事情にもよる。

定理 4.2 がわかったとき、少なくとも筆者 (石川) は「バイカンドル彩色の情報 = カンドル彩色 + シャドーの情報」といった認識を持っていたし、定理 4.7 でカンドル不変量の側にシャドーが出てくるのもそのせいだと思っていた。しかし、その後にはわかった定理 3.1 によると

$$\text{「バイカンドル彩色 + シャドーの情報 = カンドル彩色 + シャドーの情報」}$$

という認識の方が正しいようである。シャドーを考えない (バイ) カンドルコサイクル不変量はこの各辺をシャドーで “割った” 情報を見ているようなものであるが、このときの割り方は左右で異なるものになっている ( $\psi_{\text{As}}$  は群準同型ではなかったし、 $B^{BQ}X$  と  $B^Q\mathcal{Q}(X)$  も同相ではなかった。) ため、「バイカンドル彩色の情報 = カンドル彩色の情報」といった関係が成り立たない、というのが定理 4.7 でシャドーが出てくることの本当の理由のようである。

註 4.9. 講演では紹介しなかったが、(曲面) 絡み目の基本バイカンドルは基本カンドルから復元される。すなわち、カンドルの圏からバイカンドルの圏への函手  $B$  が存在して、これで基本カンドルを送ってやったものは基本バイカンドルと同型になる。また、 $B$  は  $\mathcal{Q}$  の左随伴になっていることもわかるため、このことから代数的に定理 3.1 や系 3.2 を導くこともできる。詳細は [4] を参照されたいが、筆者はこれらをほぼ代数的な議論によって示していたため、定理 3.1 の対応  $\Psi$  などが図式的に美しい形で表されるというのは驚くべきことであった。

## 参考文献

- [1] Ashihara, S., *Fundamental biquandles of ribbon 2-knots and ribbon torus-knots with isomorphic fundamental quandles*. J. Knot Theory Ramifications **23** (2014), 17 pp.
- [2] Carter, S., Kamada, S., Saito, M., *Surfaces in 4-space*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 142. Low-Dimensional Topology, III. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [3] Fenn, R., Jordan-Santana, M., Kauffman, L. *Biquandles and virtual links*. Topology Appl. **145** (2004), 157–175.
- [4] Ishikawa, K., *Knot quandles vs. knot biquandles*. in preparation.
- [5] Ishikawa, K., Tanaka, K., *Quandle coloring vs. biquandle coloring*. in preparation.
- [6] 鎌田 聖一、曲面結び目理論 (シュプリンガー現代数学シリーズ)。丸善出版、2012.
- [7] Lebed, V., Vendramin, L., *On structure groups of set-theoretic solutions to the Yang-Baxter equation*, to appear in Proc. Edinb. Math. Soc.
- [8] Nosaka, T., *On homotopy groups of quandle spaces and the quandle homotopy invariant of links*. Topology Appl. **158** (2011), 9961011.
- [9] Nosaka, T., *Quandle homotopy invariants of knotted surfaces*. Math. Z. **274** (2013), 341–365.
- [10] 大槻 知忠、結び目の不変量 (共立講座 数学の輝き 4)。共立出版、2015.
- [11] Soloviev, A. *Non-unitary set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation*. Math. Res. Lett. **7** (2000), 577–596.