

結び目群の $SL_2\mathbb{F}_{p^n}$ 既約表現の共役類の個数の合同ゼータ関数

坂中大志（京都大学数理解析研究所）*

概要

結び目群の $SL_2\mathbb{F}_{p^n}$ 表現の個数の母関数を結び目の合同ゼータ関数という。本稿では 4 つの two-bridge 結び目および絡み目の合同ゼータ関数を、具体的な素数に対して求めた結果を紹介する。これは character variety に関係しており、character variety は双曲構造の変形空間に関する。(7,3) two-bridge 結び目補空間の双曲構造の変形空間の予想される境界を、計算機を用いて数値的に求めた結果についても紹介する。

1 Introduction

Sink[12] は、1998 年に結び目の補空間の基本群の全ての $SL_2\mathbb{F}_{p^n}$ 表現の共役類の個数の母関数として結び目の合同ゼータ関数を定義した。これは Weil 予想を背景としている。Weil 予想は、方程式の解の個数の母関数としての合同ゼータ関数が有理式になることを主張する。Weil[15] は方程式がリーマン面を定める場合に予想を証明し、有理式の分子の多項式の次数にリーマン面の種数が表れることを示した。two-bridge 結び目群の character variety はリーマン面であり、character variety に対して Weil 予想を適用すれば結び目の合同ゼータ関数が有理式となることがわかる。合同ゼータ関数の計算は、Sink[12], Xu[16], Li[8, 9] がトラス結び目に対して全ての素数について行った。また既約表現に制限した場合には、原田 [4, 5] により figure-8 結び目に対して計算されており、3 つの arithmetic two-bridge 絡み目に対しては character variety の合同ゼータ関数が全ての素数で求められている。合同ゼータ関数と結び目の幾何との関連についても調べられている [4, 6]。

本稿では、4 つの簡単な two-bridge 結び目の $SL_2\mathbb{F}_{p^n}$ 既約表現に関する合同ゼータ関数を、11 以下の奇素数について計算した結果を紹介する (定理 3.1, 3.2, 3.3, 3.4)。結び目の合同ゼータ関数はトポロジーに現れる数論的な量であり、結び目の何らかの数論的な側面を表していることが期待される。証明の方針は、 $SL_2\mathbb{F}_{p^n}$ 既約表現の共役類と character variety の \mathbb{F}_{p^n} 有理点との対応によって、結び目の合同ゼータ関数の計算が方程式のゼータ関数の計算に帰着され、character variety の種数と有限個の n に対する \mathbb{F}_{p^n} 点を用いれば、Weil 予想によって合同ゼータ関数が求まるというものである。また、character variety と双曲構造の変形空間の関係に基づいて、(7,3) two-bridge 結び目の双曲構造の変形空間の予想される境界を、計算機を用いた数値実験として求めた結果を紹介する。

本稿の構成は以下の通りである。§2 で Weil 予想と結び目の合同ゼータ関数の定義を述べ

* 〒 606-8502 京都府京都市左京区北白川追分町 京都大学数理解析研究所 e-mail: sakanaka@kurims.kyoto-u.ac.jp

る. また結び目群の $SL_2\mathbb{F}_{p^n}$ 既約表現の共役類と character variety の \mathbb{F}_{p^n} 有理点との対応を述べるが, これが主定理の証明の核である. §3 では合同ゼータ関数の具体的な計算結果を紹介する. §4 で figure-8 結び目および (7, 3) two-bridge 結び目の双曲構造の変形空間の予想される境界について述べる.

2 準備

本節では, まず射影曲線の合同ゼータ関数に関する Weil 予想について説明し, 結び目の合同ゼータ関数を定義する. そして, two-bridge 結び目の合同ゼータ関数の計算が, 射影曲線の合同ゼータ関数の計算に帰着されることを述べる.

2.1 Weil 予想

代数曲線に対する Weil 予想について述べる. 詳細は [14] 等を参照されたい.

\mathbb{Z} 係数斉次多項式が, \mathbb{C} 上でリーマン面 V を定め, 有限体の代数閉包 $\overline{\mathbb{F}_p}$ 上で非特異射影曲線 V_p を定めているとする. V_p の \mathbb{F}_{p^n} 有理点全体を $V_p(\mathbb{F}_{p^n})$ と表すとき,

$$Z_{V,p}(t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\#V_p(\mathbb{F}_{p^n})}{n} t^n\right)$$

を V の合同ゼータ関数という. 1次元の場合の Weil 予想として, 次が知られている:

(i) $Z_{V,p}(t)$ は有理式による表示

$$Z_{V,p}(t) = \frac{P(t)}{(1-t)(1-pt)}$$

をもつ. V の種数を g とするとき, $P(t)$ は定数項が 1 の整数係数 $2g$ 次多項式である.

(ii) 関数等式

$$Z_{V,p}\left(\frac{1}{pt}\right) = p^{1-g} t^{2-2g} Z_{V,p}(t).$$

(iii) $P(t) = (1 - \omega_1 t) \cdots (1 - \omega_{2g} t)$ とすると

$$|\omega_i| = \sqrt{p}.$$

これを踏まえて結び目の合同ゼータ関数を定義する.

2.2 結び目の合同ゼータ関数

$e_i = (-1)^{\lfloor i\beta/\alpha \rfloor}$ とおくと, (α, β) two-bridge 結び目の結び目群は

$$\pi_1(S^3 \setminus K(\alpha, \beta)) = \langle a, b \mid aw = wb, w = b^{e_1} a^{e_2} \cdots a^{e_{\alpha-1}} \rangle, \quad (1)$$

(α, β) two-bridge 絡み目の絡み目群は,

$$\pi_1(S^3 \setminus K(\alpha, \beta)) = \langle a, b \mid aw = wa, w = b^{e_1} a^{e_2} \cdots b^{e_{\alpha-1}} \rangle \quad (2)$$

という表示をもつ. ここで, それぞれの群の生成元 a, b は, それぞれの結び目および絡み目の2つのメリディアンに対応する.

ここで, 群の表現に関する用語を述べる. ρ を群 G の $\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_{p^n}$ 表現とする. いま $\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_{p^n}$ は1次分数変換によって $\overline{\mathbb{F}_{p^n}}$ に作用する. ある $u \in \overline{\mathbb{F}_{p^n}}$ が存在し, 任意の $g \in G$ に対して $\rho(g)$ がこの作用に関して u を不動点にもつとき, ρ は可約であるという. 可約でない表現を既約という. また, ある $P \in \mathrm{SL}_2\overline{\mathbb{F}_{p^n}}$ が存在し, 任意の $g \in G$ に対して $\rho'(g) = P^{-1}\rho(g)P$ をみたすとき, ρ と ρ' は共役であるといい, $\rho \sim \rho'$ と表す.

結び目 K に対し, 結び目群 $\pi_1(S^3 \setminus K)$ の $\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_{p^n}$ 既約表現の共役類の個数を N_{p^n} と表すとき,

$$Z_{K,p}(t) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_{p^n}}{n} t^n\right)$$

を K の合同ゼータ関数という. two-bridge 絡み目に対しては, 絡み目群の生成元である2つのメリディアン a, b を共役な元にうつす既約表現に制限して合同ゼータ関数を定義する.

注 2.1. これが有理式となることは原田 [4, Theorem 1.1.] によって示されている.

2.3 $\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_{p^n}$ の元の共役類

行列の組の共役類とトレースの組の対応について述べる.

\mathbb{F}_{p^n} を位数 p^n の有限体とする. $A, B \in \mathrm{SL}_2\mathbb{F}_{p^n}$ に対し, ある $P \in \mathrm{SL}_2\overline{\mathbb{F}_{p^n}}$ が存在して

$$P^{-1}AP = B$$

をみたすとき, A と B は共役であるといい, $A \sim B$ と表す. また, $(A, B), (A', B') \in (\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_{p^n})^2$ に対し, ある $P \in \mathrm{SL}_2\overline{\mathbb{F}_{p^n}}$ が存在して

$$P^{-1}AP = A', \quad P^{-1}BP = B'$$

をみたすとき, (A, B) と (A', B') は共役であるといい, $(A, B) \sim (A', B')$ と表す. このとき, 次の対応がある (cf. [11]).

補題 2.2. 写像

$$\begin{aligned} \phi: \{(A, B) \in (\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_{p^n})^2 \mid A, B \text{ は同時上三角化不可, } A \sim B\} / \text{共役} \\ \longrightarrow \{(x, z) \in (\mathbb{F}_{p^n})^2 \mid (z-2)(z-x^2+2) \neq 0\} \end{aligned}$$

を

$$\phi(A, B) = (\operatorname{tr} A, \operatorname{tr} AB)$$

で定める. このとき, ϕ は全単射である.

2.4 two-bridge 結び目群の $\mathrm{SL}_2\mathbb{F}_{p^n}$ 表現

補題 2.2 により, 表現の共役類と方程式の解との対応が導かれることを述べる.

補題 2.3. K を (α, β) two-bridge 結び目とし, K の結び目群の表示 (1) をとる. このとき, ある整数係数多項式 $f_K(x, z) \in \mathbb{Z}[x, z]$ が存在して, 任意の素数 p , 正整数 n , 表現 $\rho: \pi_1(S^3 \setminus K) \rightarrow \mathrm{SL}_2\mathbb{F}_{p^n}$ に対して, $A = \rho(a), B = \rho(b), W = \rho(w), x = \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B, z = \operatorname{tr} AB$ とおけば,

$$AW - WB = f_K(x, z)(A - B)$$

が成り立つ.

また, L を (α, β) two-bridge 絡み目とし, L の絡み目群の表示 (2) をとる. このとき, ある整数係数多項式 $f_L(x, y, z) \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ が存在して, 任意の素数 p , 正整数 n , 表現 $\rho: \pi_1(S^3 \setminus L) \rightarrow \mathrm{SL}_2\mathbb{F}_{p^n}$ で 2 つのメリディアン a, b を共役にうつすものに対して, $A = \rho(a), B = \rho(b), W = \rho(w), x = \operatorname{tr} A, y = \operatorname{tr} B, z = \operatorname{tr} AB$ とおけば,

$$AW - WA = f_L(x, y, z)(AB - BA)$$

が成り立つ.

補題 2.3 の f_K または f_L を, 結び目 K または絡み目 L の **character variety** という.

注 2.4. 正確には f_K, f_L は character variety のうち既約表現を含む既約成分であるが, ここでは単に character variety とよぶ.

補題 2.2 および補題 2.3 により, 既約表現の共役類とトレースの組の次の対応が得られる.

補題 2.5. K を (α, β) two-bridge 結び目とし, K の結び目群の表示 (1) をとる. $f_K \in \mathbb{Z}[x, z]$ を K の character variety とし, 写像

$$\begin{aligned} \phi_K: \{ \rho: \pi_1(S^3 \setminus K) \longrightarrow \mathrm{SL}_2\mathbb{F}_{p^n} \mid \text{既約表現} \} / \text{共役} \\ \longrightarrow \{ (x, z) \in (\mathbb{F}_{p^n})^2 \mid f_K(x, z) = 0, (z - 2)(z - x^2 + 2) \neq 0 \} \end{aligned}$$

を

$$\phi_K(\rho) = (\operatorname{tr} \rho(a), \operatorname{tr} \rho(ab))$$

で定める. このとき, ϕ_K は全単射である.

また, L を (α, β) two-bridge 絡み目とし, L の絡み目群の表示 (2) をとる. $f_L \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ を L の character variety とし, 写像

$$\begin{aligned} \phi_L: \{ \rho: \pi_1(S^3 \setminus L) \longrightarrow \mathrm{SL}_2 \mathbb{F}_{p^n} \mid \text{既約表現, } \rho(a) \sim \rho(b) \} / \text{共役} \\ \longrightarrow \{ (x, z) \in (\mathbb{F}_{p^n})^2 \mid f_L(x, x, z) = 0, (z-2)(z-x^2+2) \neq 0 \} \end{aligned}$$

を

$$\phi_L(\rho) = (\mathrm{tr} \rho(a), \mathrm{tr} \rho(ab))$$

で定める. このとき, ϕ_L は全単射である.

注 2.6. 本稿では表現の共役を代数閉体まで広げて考えているが, 既約表現に限れば [10, Theorem 6.12.] により, 通常の (代数閉体に広げない) 共役を考えても同じであることがわかる. (本稿における表現の既約は [10] における絶対既約 (absolutely irreducible) である.)

補題 2.5 により, 既約表現の共役類を数えることは, character variety の点の個数を数えることに帰着される. すなわち, 結び目の合同ゼータ関数を求めるには character variety の合同ゼータ関数を求めればよく, Weil 予想により, character variety の合同ゼータ関数は, character variety の種数と, 有限個の n に対する \mathbb{F}_{p^n} 有理点の個数で決定される.

3 主結果

two-bridge 結び目 (絡み目) $K(3, 1), K(5, 3), K(7, 3), K(8, 3)$ の合同ゼータ関数を, 11 以下の奇素数で character variety が \mathbb{F}_p 上非特異であるものに対して求めた結果を述べる.

定理 3.1.

$$Z_{K(3,1),p}(t) = \begin{cases} \frac{1-t}{1-2t} & p=2, \\ \frac{1-t}{1-3t} & p=3, \\ \frac{(1-t)^2}{1-pt} & p \equiv 1, 11 \pmod{12}, \\ \frac{(1-t)(1+t)}{1-pt} & p \equiv 5, 7 \pmod{12}. \end{cases}$$

定理 3.2.

$$Z_{K(5,3),p}(t) = \begin{cases} \frac{(1+t)(1-t)^2(1+3t^2)}{1-3t} & p=3, \\ \frac{(1+t)(1-t)^2(1+4t+7t^2)}{1-7t} & p=7, \\ \frac{(1-t)^3(1-4t+11t^2)}{1-11t} & p=11. \end{cases}$$

$K(5, 3)$ の合同ゼータ関数は [4] でも調べられている.

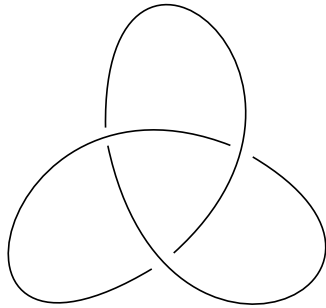


図 1: $K(3, 1)$ (trefoil 結び目)

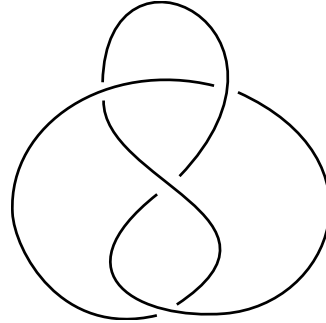


図 2: $K(5, 3)$ (figure-8 結び目)

定理 3.3.

$$Z_{K(7,3),p}(t) = \begin{cases} \frac{(1+t)(1-t)^3(1-1t+2t^2-3t^3+9t^4)}{1-3t} & p=3, \\ \frac{(1-t)^4(1+1t+5t^3+25t^4)}{1-5t} & p=5, \\ \frac{(1-t)^4(1+5t+18t^2+55t^3+121t^4)}{1-11t} & p=11. \end{cases}$$

定理 3.4.

$$Z_{K(8,3),p}(t) = \begin{cases} \frac{(1+t)(1-t)^3(1+3t^2)}{1-3t} & p=3, \\ \frac{(1-t)^4(1+4t+5t^2)}{1-5t} & p=5, \\ \frac{(1+t)(1-t)^3(1+7t^2)}{1-7t} & p=7, \\ \frac{(1+t)(1-t)^3(1+11t^2)}{1-11t} & p=11. \end{cases}$$

[5] において, $K(8, 3)$ の character variety の合同ゼータ関数が全ての素数に対して求められている.

定理 3.2, 3.3, 3.4 において, 各ゼータ関数の分子の因数のうち, 最高次のものが character variety の合同ゼータ関数に現れる部分で, 低次の因子は character variety の解と既約表現の共役類との対応のずれが反映されている.

4 双曲構造の変形空間

本節では, 双曲構造の変形空間と, figure-8 結び目および (7,3) two-bridge 結び目の双曲構造の変形空間の予想される境界について述べる.

4.1 双曲構造の変形空間

3次元多様体の双曲構造の変形空間について、詳細は [13],[2],[1] 等を参照されたい。

3次元球面 S^3 に対する (p, q) -Dehn 手術は、 p, q が実数の場合にも拡張して定義することができる。双曲結び目補空間を (p, q) -Dehn 手術して得られる $M_{(p,q)}$ に双曲構造が入る $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ の集合を、 K の補空間に対する双曲構造の変形空間（双曲 Dehn 手術空間）という。 M の双曲構造から定まるホロノミー表現 ρ に対し、 $\rho(m)^p \rho(l)^q = \pm E$ をみたす (p, q) による Dehn 手術によって $M_{(p,q)}$ には双曲構造が入る。

4.2 (5,3) two-bridge 結び目の双曲構造の変形空間

$K(5, 3)$ の結び目群の $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ 表現 ρ のうち、トレースが実数ものに対して $\rho(m)^p \rho(l)^q = \pm E$ をみたす (p, q) を示したのが、次の図の水色の線で表した部分である。ここで (p, q) と $(-p, -q)$ は同一視されている。また、青い点は $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ -character variety の ideal point, 赤い点は dihedral 表現に対応しており、これらの点を境にして水色の線の部分ではホロノミー表現が $\mathrm{PSL}_2\mathbb{R}$ 表現, $\mathrm{SO}(3)$ 表現, $\mathrm{Isom}\mathbb{H}^2$ 表現に退化しており、双曲構造は入らない。図の灰色の部分 $K(5, 3)$ の双曲構造の変形空間であることが予想される。双曲構造の変形空間については [13] で初めて述べられ、[7] によってこれと同じ図が得られている。[3] では無限遠から p 軸に沿って点 $(3, 0)$ までの全ての点で双曲構造が入ることが示されている。

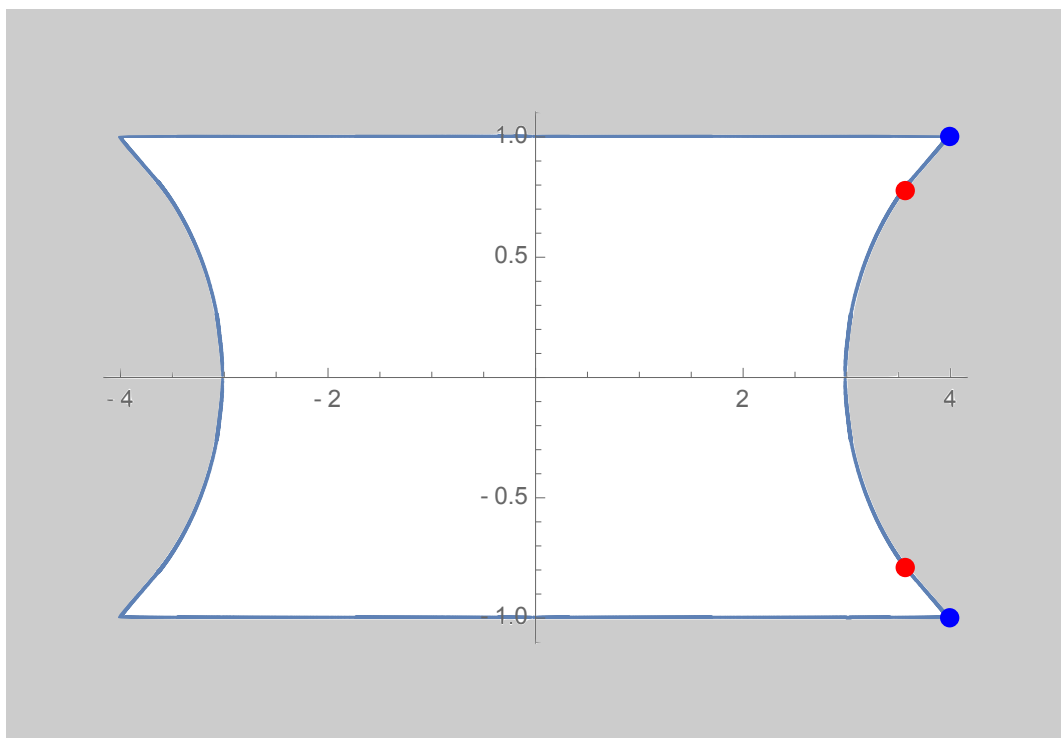


図 3: $K(5, 3)$ の双曲構造の変形空間

4.3 (7,3) two-bridge 結び目の双曲構造の変形空間

$K(7,3)$ の結び目群の $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ 表現 ρ のうち, トレースが実数ものに対して $\rho(m)^p\rho(l)^q = \pm E$ をみたす (p, q) の集合が, 次の図の水色の線の部分である. ここでも $\mathrm{PSL}_2\mathbb{C}$ -character variety の ideal point, dihedral 表現に対応する点を境にして, 水色の部分ではホロノミー表現が $\mathrm{PSL}_2\mathbb{R}$ 表現, $\mathrm{SO}(3)$ 表現, $\mathrm{Isom}\mathbb{H}^2$ 表現に退化しており, 双曲構造は入らない. $K(5,3)$ の場合と同様に, $K(7,3)$ の補空間の双曲構造の変形空間は図の灰色の部分であると予想される.

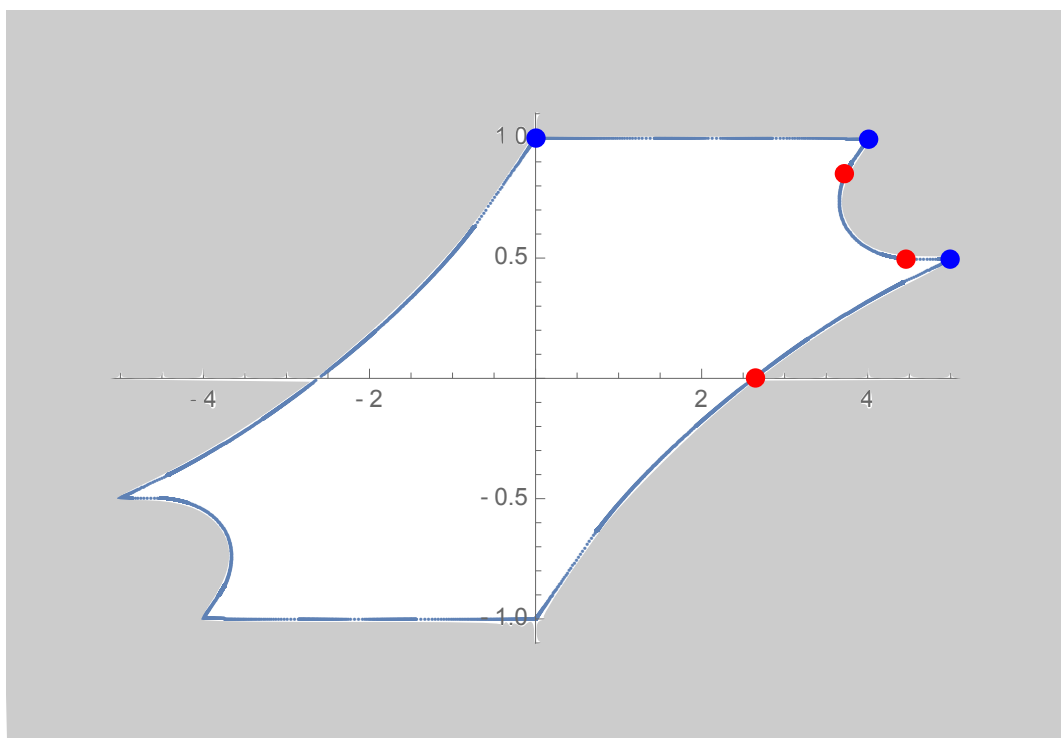


図 4: $K(7,3)$ の双曲構造の変形空間

参考文献

- [1] Boileau, M., Maillot, S., Porti, J., *Three-dimensional orbifolds and their geometric structures*, Panoramas et Synthèses **15**, Société Mathématique de France, 2003.
- [2] Cooper, D., Hodgson, C., Kerckhoff, S., *Three-dimensional orbifolds and cone-manifolds*, MSJ Memoirs **5**, Mathematical Society of Japan, 2000.
- [3] Fujii, M., *Degeneration of hyperbolic structures on the figure-eight knot complement and points of finite order on an elliptic curve*, J. Math. Kyoto Univ. **45** (2005), 343–354.

- [4] Harada, S., *Hasse-Weil zeta function of absolutely irreducible SL_2 -representations of the figure 8 knot group*, Proc. Amer. Math. Soc. **139** (2011), 3115–3125.
- [5] Harada, S., *Hasse-Weil zeta functions of SL_2 -character varieties of arithmetic two-bridge link complements*, Finite Fields Appl. **27** (2014), 115–129.
- [6] Harada, S., *Hasse-Weil zeta functions of SL_2 -character varieties of closed orientable hyperbolic 3-manifolds*, arXiv:1512.07747.
- [7] Hodgson, C., *Degeneration and Regeneration of Hyperbolic Structures on Three-Manifolds*, Ph.D. Thesis, Princeton University, 1986.
- [8] Li, W., Xu, L., *Counting $SL_2(\mathbb{F}_{2^s})$ representations of torus knot groups*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **19** (2003), 233–244.
- [9] Li, W., Xu, L., *Counting $SL_2(\mathbb{F}_q)$ -representations of torus knot groups*, J. Knot Theory Ramifications **13** (2004), 401–426.
- [10] Nakamoto, K., *Representation varieties and character varieties*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **36** (2000), 159–189.
- [11] Riley, R., *Holomorphically parameterized families of subgroups of $SL(2, \mathbb{C})$* , Mathematika **32** (1985), 248–264.
- [12] Sink, J. M., *A zeta-function for a knot using $SL_2(\mathbb{F}_p^s)$ representations*, Knots in Hellas '98, Ser. Knots Everything, **24**, World Sci. Publishing, 2000, 452–470.
- [13] Thurston, W. P., *The Geometry and Topology of three-manifolds*, Princeton Univ. Math. Dept., 1978, <http://library.msri.org/books/gt3m/>.
- [14] 上野健爾, 代数幾何入門, 岩波書店, 1995.
- [15] Weil, A., *Sur les Courbes Algébriques et les Variétés qui s'en Déduisent*, Hermann, 1948.
- [16] Xu, L., *$SL_2(\mathbb{F}_q)$ -Representations of Torus Knots*, Master Thesis, Oklahoma State University, 2001.