

Eulerian coorientations and Seifert surfaces for divide links

村長 達 (広島大学)

向き付け可能なコンパクト曲面に適切にはめ込まれた閉曲線や弧の和集合を divide とよぶ. Divide が与えられると, 曲面上の単位接バンドル内の oriented link が得られる. これを divide link とよぶ. Divide をグラフとみなし, 然るべき条件を満たすように各辺に法方向を定めたものをその divide の Eulerian coorientation とよぶ. Eulerian coorientation が与えられると, divide link の Seifert 曲面が得られる. 本稿では, Eulerian coorientation のコホモロジカルな性質と対応する Seifert 曲面の幾何学的な性質についての研究の経過報告を行う.

1 導入

定義 1.1. Σ を向き付け可能なコンパクト曲面とする. はめ込み

$$\varphi: \left(\bigsqcup^n [0, 1] \right) \cup \left(\bigsqcup^m S^1 \right) \rightarrow \Sigma$$

が以下の (i), (ii), (iii) を満たすとき, $P = \text{Im}\varphi$ を Σ 上の **divide** とよぶ.

- (i) P は自己接点も三重点もない.
- (ii) 各 $[0, 1]$ について, $\varphi(\{0, 1\}) \subset \partial\Sigma_{g,n}$ かつ $\varphi((0, 1)) \cap \partial\Sigma_{g,n} = \emptyset$.
- (iii) 各 S^1 に対し, $\varphi(S^1)$ は $\partial\Sigma$ と交わらない.

また P の **interior region** とは P によって分けられる Σ の region で, その境界が P のみからなるものである. P の **exterior region** とは P によって分けられる Σ の region で, interior region ではないものである. つまり exterior region とは P によって分けられる Σ の region で, その境界が Σ の境界の一部を含むものである.

定義 1.2. 曲面 Σ 上の divide P が **admissible** であるとは以下を満たすときをいう.

- (i) P は 連結である.
- (ii) P の interior region はすべて単連結である.
- (iii) P の各 exterior region は単連結か annulus である.
- (iv) P は checkerboard coloring できる. ただし checkerboard coloring とは 辺を共有する二つの region を白と黒の異なる二色で塗り分ける操作である.

図 1 は disk と torus 上の admissible divide の例である.

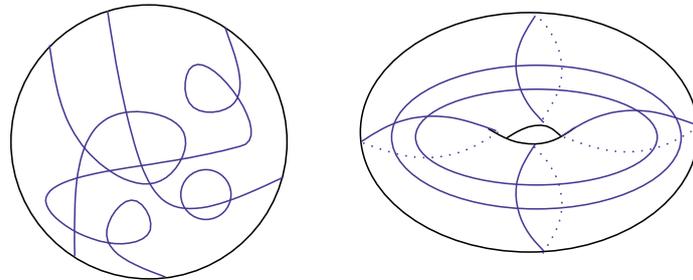


図 1: 左は disk 上の, 右は torus 上の admissible divide

以下での議論では, divide は常に admissible であるとする.

定義 1.3. Divide を交点を頂点とするグラフとみなす. 集合

$$\{\nu_e \mid e \text{ はグラフ } P \text{ の辺, } \nu_e \text{ は } e \text{ 上の法線方向}\}$$

を P の **coorientation** という.

定義 1.4. Divide P の coorientation が **Eulerian coorientation** であるとは P の各 4 価頂点の近傍で以下の図 2 のいずれかのようにするときをいう.

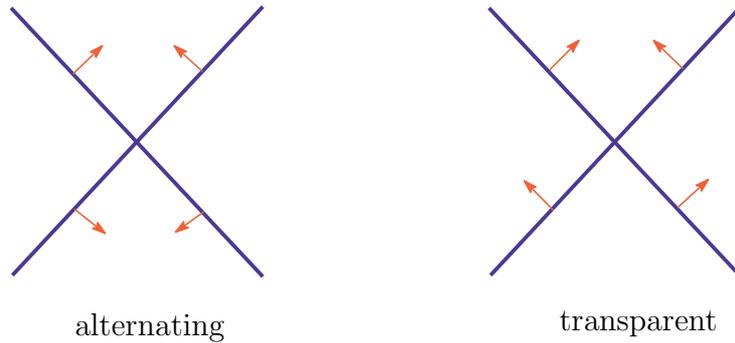


図 2: 各頂点のまわりでの Eulerian coorientation

以下, P の Eulerian coorientation の集合を $\text{Eul}(P)$ と表すことにする.

定義 1.5. P を divide とする. P の checkerboard coloring を 1 つ固定する. P の coorientation ν を各辺上で白の region の方を向くように定めると, これは Eulerian coorientation になる (各 4 個頂点のまわりでは常に alternating になる). この ν を checkerboard coloring から得られる Eulerian coorientation とよぶ (図 3 参照).

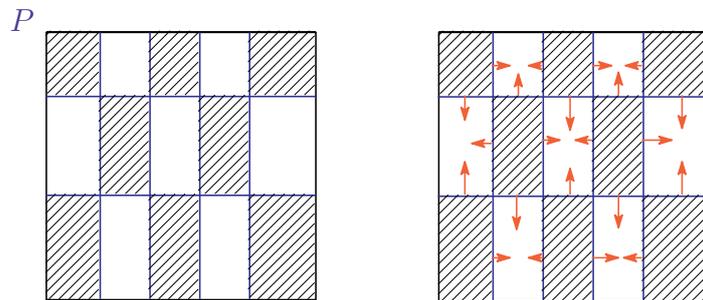
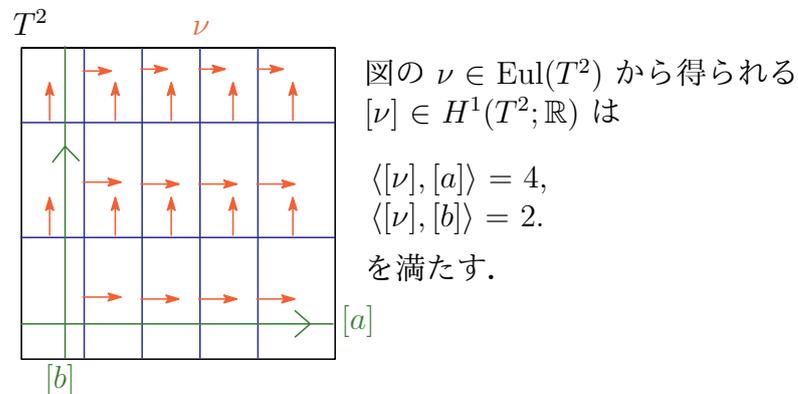


図 3: checkerboard coloring から得られる Eulerian coorientation

注意 1.6. Checkerboard coloring は白と黒の入れ替えの分しか自由度がないため, ちょうど 2 種類存在する. 従って checkerboard coloring から得られる P 上の Eulerian coorientation の数はちょうど 2 つである.

$\nu \in \text{Eul}(P)$ を一つとるごとに, 1 次元コホモロジー群の元 $[\nu]$ が次のようにして一意的に定まる. 任意の $H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$ の元 α に対して, α を表す cycle c と P の交点を考える. ここで c は P と辺の内部でのみ交わり, かつ交わりはすべて横断的であるとする. 各交点で c の向きとその点における ν の向きが同調していたら $+1$, していない場合は -1 とし, その総和を α に対応させる. Eulerian

coorientation の定義より, このようにして得られるカップリング $\langle [\nu], \alpha \rangle$ は c の取り方によらずに定まることがわかる.



2 Divide link とその Seifert surface

Σ を向き付け可能なコンパクト曲面とする. Σ 上に Riemann 計量を入れ, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ と表すことにする. Σ の単位接バンドル $UT(\Sigma)$ は

$$UT(\Sigma) = \bigcup_{x \in \Sigma} \{u \in T_x(\Sigma) \mid \langle u, u \rangle = 1\}$$

で定義される. ただし Σ に境界がある場合は, 境界上の各点のファイバーを 1 点につぶして得られる空間とする.

定義 2.1. P を Σ 上の divide とする. P の **divide link** $L(P)$ を

$$L(P) := \{(x, u) \in UT(\Sigma) \mid x \in P, u \in T_x P\}$$

で定義する.

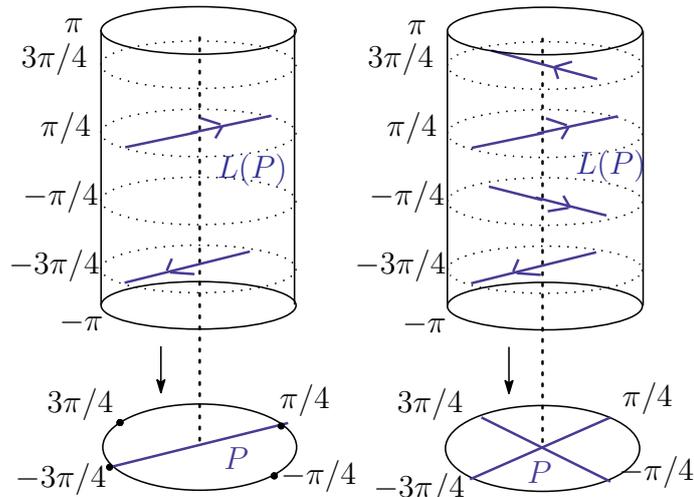


図 4: $L(P)$ の局所的な状況

図 4 の下の disk は Σ 上の局所的な disk であり, その上の円柱は disk 上のファイバーを表している.

$L(P)$ は定義より自然に orientation が入る. つまり $L(P)$ は $UT(\Sigma)$ 内の oriented link であることに注意する.

定義 2.2. P を Σ 上の divide, $\nu \in \text{Eul}(P)$ とする. このとき **BB-surface** $S_\nu(P)$ を

$$S_\nu(P) := \{(x, u) \in UT(\Sigma) \mid x \in P, u \in T_x P, \langle \nu, u \rangle \geq 0\}$$

を必要ならば図 5 のように smoothing したものと定める.

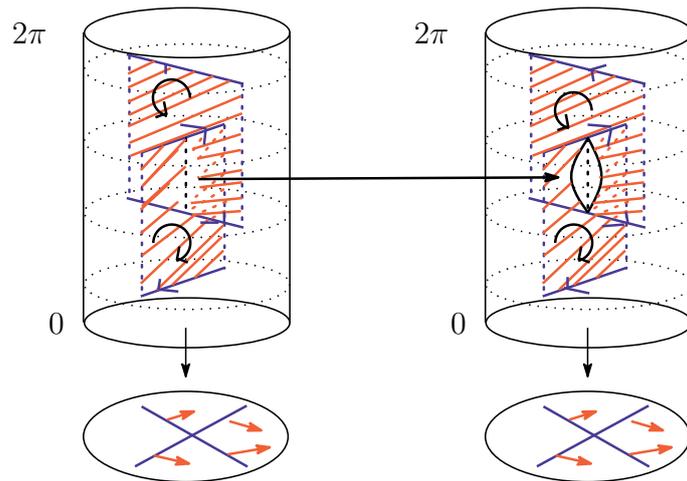


図 5: smoothing のイメージ

定義より $S_\nu(P)$ は $L(P)$ の Seifert 曲面である. $S_\nu(P)$ の向きを入れ方は $L(P)$ の向きと, $S_\nu(P)$ が $L(P)$ に誘導する向きが一致するように入れる. 図 6 は各交点での局所的な $L(P)$ と $S_\nu(P)$ の状況を表している.

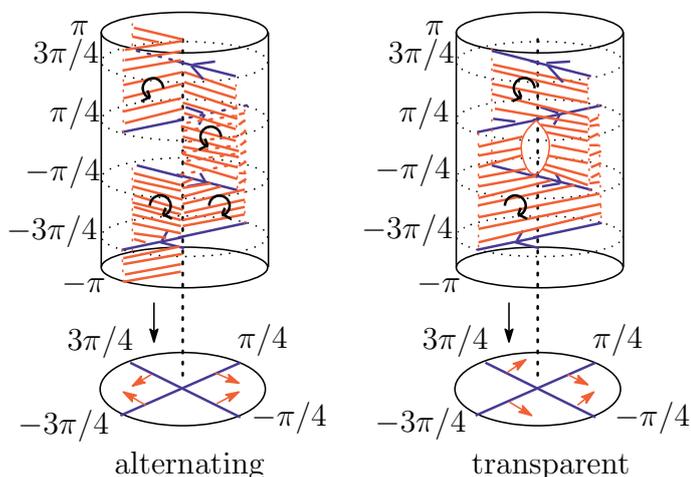


図 6: 交点の近傍での $S_\nu(P)$ の部分曲面

注意 2.3. P の各交点の近傍に対応する $S_\nu(P)$ の部分曲面は常にアニュラスと同相である.

3 Disk 上の divide とその BB-surface

Disk 上の divide とその BB-surface について, 次の定理が知られている.

定理 3.1 (A'Campo [1], Hirasawa [2]). $P \subset \Sigma_{0,1}$ ($= D^2$) を divide, $\nu \in \text{Eul}(P)$ を各交点のまわりで transparent であるような Eulerian coorientation とする. このとき $S_\nu(P) \subset UT(D^2)$ ($= S^3$) は oriented link $L(P)$ の fiber surface である.

$L(P)$ の fiber 性は A'Campo [1] によって示されて, 平澤 [2] によって具体的に曲面が構成された.

定理 3.2 (A'Campo [1], Ishikawa [3]). $P \subset \Sigma_{g,n}$ を divide, $\nu \in \text{Eul}(P)$ を checkerboard coloring から得られる Eulerian coorientation とする. このとき $S_\nu(P) \subset UT(\Sigma_{g,n})$ は oriented link $L(P)$ の fiber surface である.

これらの定理を受けて次の結果を得た.

命題 3.3. $P \subset D^2$ を divide, $\nu \in \text{Eul}(P)$ を P の任意の Eulerian coorientation とする. このとき $S_\nu(P)$ は oriented link $L(P)$ の fiber surface である.

A'Campo [1] によって $L(P)$ の fiber surface の Euler 標数が P の図式から計算することができる. 一方注意 2.3 より $S_\nu(P)$ の Euler 標数が計算できる. これらが一致することを見ることで命題 3.3 が証明される.

4 Intersection norm

以下閉曲面 $\Sigma_{g,0}$ 上の divide のみを考える. 次は Cossarini-Dehornoy [4] によって導入された, BB-surface を代数的に考察するための重要な道具である.

定義 4.1 (Cossarini-Dehornoy [4]).

1. 以下で定まる $\|\cdot\|_P : H_1(\Sigma_{g,0}; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ を **intersection norm** とよぶ.

$$\|x\|_P := \min_{[a]=x} |a \cap P| \quad (\text{ただし, } a \text{ と } P \text{ は一般の位置}).$$

また, 以下の集合を **norm ball** とよぶ.

$$B_{\|\cdot\|_P} := \{x \in H_1(\Sigma_{g,0}; \mathbb{R}) \mid \|x\|_P \leq 1\}.$$

2. 以下で定まる $\|\cdot\|_P^* : H^1(\Sigma_{g,0}; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ を **dual norm** とよぶ.

$$\|\varphi\|_P^* := \max_{x \in B_{\|\cdot\|_P}} \varphi(x) \quad (\text{ただし } \varphi \in H^1(\Sigma_{g,0}; \mathbb{R})).$$

また, 以下の集合を **dual ball** とよぶ.

$$B_{\|\cdot\|_P}^* := \{\varphi \in H^1(\Sigma_{g,0}; \mathbb{R}) \mid \|\varphi\|_P^* \leq 1\}.$$

図 7 はトーラス上の divide の norm ball と dual ball の例である.

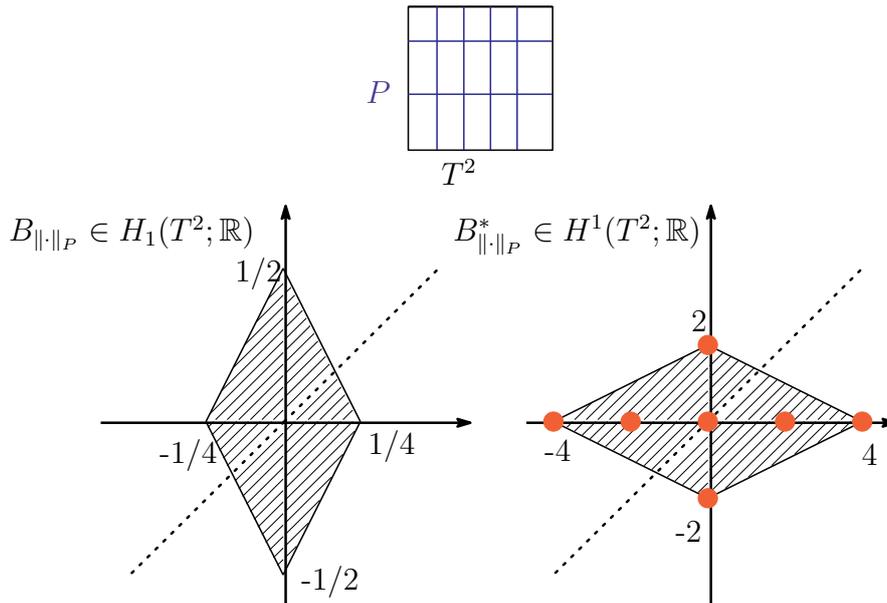


図 7

これらに関して次の定理が知られている。

定理 4.2 (Cossrarini-Dehornoy [4]).

- (i) $P \subset \Sigma_{g,0}$ を divide, $\nu \in \text{Eul}(P)$ とする. $\nu \in \text{Eul}(P)$ に対して $[\nu]$ は $B_{||\cdot||_P}^*$ 内の偶数点に対応する. 逆に $B_{||\cdot||_P}^*$ 内の任意の偶数点 φ に対して $[\nu] = \varphi$ を満たす $\nu \in \text{Eul}(P)$ が存在する.
- (ii) $P \subset \Sigma_{g,0}$ を geodesic divide, $\nu \in \text{Eul}(P)$ とする. $[\nu] \in \text{Int}(B_{||\cdot||_P}^*)$ でありかつそのときに限り, $S_\nu(P)$ は $UT(\Sigma)$ 上の geodesic flow $(\phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ の Birkhoff cross section になる.
- (iii) $P \subset \Sigma_{g,0}$ を geodesic divide, $\nu \in \text{Eul}(P)$ とする. $\nu_1, \nu_2 \in \text{Eul}(P)$ を $[\nu_1], [\nu_2] \in \text{Int}(B_{||\cdot||_P}^*)$ であるものとする. $[\nu_1] = [\nu_2]$ でありかつそのときに限り, $S_{\nu_1}(P)$ は $S_{\nu_2}(P)$ とイソトピックである.

この結果を受けて次のような問題が考えられる。

問題. $P \subset \Sigma_{g,0}$ が geodesic divide でない場合にも定理 4.2 と同様の事実は成立するのか？

5 主結果

前章の最後に挙げた問題に対して, 以下のような部分的な結果を得た。

5.1 BB-surface の相対ホモロジー類

定理 5.1. $P \subset \Sigma_{g,0}$ を divide, $\nu_1, \nu_2 \in \text{Eul}(P)$ であるとする. このとき $[\nu_1] = [\nu_2]$ でありかつそのときに限り, $[S_{\nu_1}(P)] = [S_{\nu_2}(P)] \in H_2(UT(\Sigma_{g,0}), L(P); \mathbb{R})$ である.

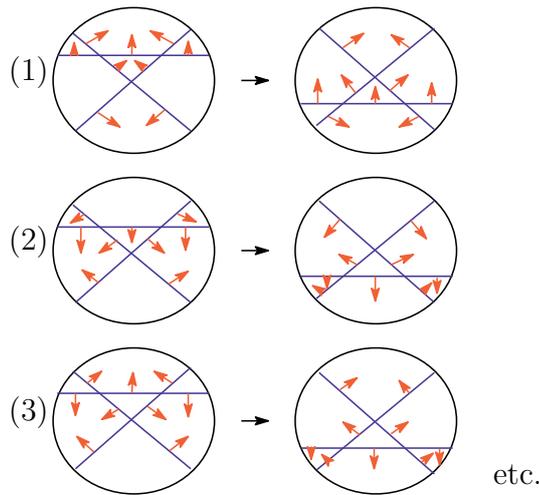
系 5.2. $P \subset \Sigma_{g,0}$ を divide, $\nu_1, \nu_2 \in \text{Eul}(P)$, $S_{\nu_1}(P)$ が $L(P)$ の fiber surface であるとする. $[\nu_1] = [\nu_2]$ のとき以下が成立する.

- (i) $S_{\nu_2}(P)$ は $L(P)$ の fiber surface である.
- (ii) $S_{\nu_1}(P)$ は $S_{\nu_2}(P)$ とイソトピックである.

特に $[\nu] = 0$ ならば $S_\nu(P)$ は fiber surface である.

5.2 Fiber 性を変えない局所変形

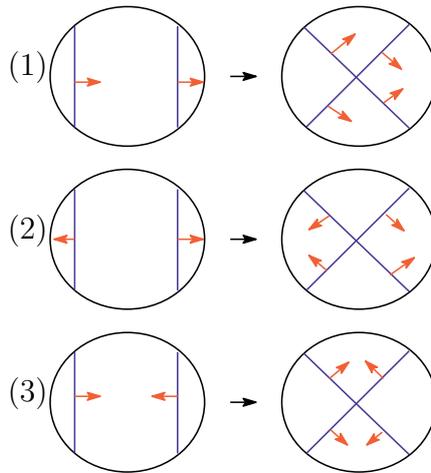
以下のような操作を考える.



これらは Eulerian coorientation 付きの divide に対する Reidemeister move III に相当する操作である. この操作に関して次の結果を得た.

定理 5.3. P を $\Sigma_{g,n}$ 上の divide, $\nu \in \text{Eul}(P)$ とする. これらの操作を施した後の divide を P' , Eulerian coorientation を ν' とする. このとき $[S_\nu(P)] = [S_{\nu'}(P')] \in H_2(UT(\Sigma), L(P); \mathbb{R})$ である. 特に $S_\nu(P)$ が fiber surface であるならば $S_{\nu'}(P')$ も fiber surface である.

次の操作を考える.



ただしこの disk は図 8 のように divide の間の geodesic の近傍として取っている。

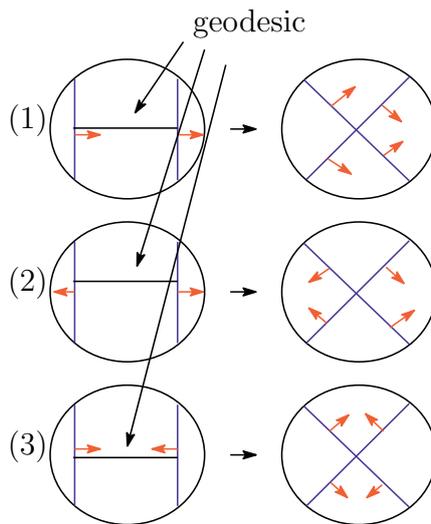


図 8

この操作に関して次の結果を得た。

定理 5.4. P を $\Sigma_{g,0}$ 上の geodesic divide, $\nu \in \text{Eul}(P)$ を $[\nu] \in \text{Int}(B_{\|\cdot\|_P}^*)$ であるものとする。これら操作を施した後の divide を P' , Eulerian coorientation を ν' とする。このときある $UT(\Sigma_{g,0})$ 上の flow $(\phi'_t)_{t \in \mathbb{R}}$ で $S_{\nu'}(P')$ が $(\phi'_t)_{t \in \mathbb{R}}$ の Birkhoff cross section になるものが存在する。特に $S_{\nu'}(P')$ は fiber surface である。

参考文献

- [1] A'Campo, N., Real deformations and complex topology of plane curve singularities, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **8** (1999), 5–23.
- [2] Hirasawa, M., Visualization of A'Campo's fibered links and unknotting operation, (English summary) *Proceedings of the First Joint Japan-Mexico Meeting in Topology (Morelia, 1999)*, *Topology Appl.* **121** (2002), no. 1-2, 287–304.
- [3] Ishikawa, M., Tangent circle bundles admit positive open book decompositions along arbitrary links, *Topology* **43** (2004), no. 1, 215–232.
- [4] Cossarini, M., Dehornoy, P., Intersection norms on surfaces and Birkhoff cross sections, [arXiv:1604.06688](https://arxiv.org/abs/1604.06688).