

Spaces of chord diagrams of spherical curves *

伊藤 昇[†]

概要

この講演では、自然数で番号付けられたコード図 (chord diagram) たちの集合 $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を用いて球面曲線全体からなる集合上の整数値関数 $\sum_i \alpha_i x_i$ を組織的に定義した。このために、コード図たちの生成する \mathbb{Z} 加群を考え、その元である Type (I), ((SII), (WII), (SIII), または (WIII) relator という元たちと整数値関数 $\sum_i \alpha_i \tilde{x}_i$ を導入した。「もしも $\sum_i \alpha_i \tilde{x}_i$ が有限個の relator 上で消えているならば、 $\sum_i \alpha_i x_i$ は射影されたライデマイスター RI (strong RII, weak RII, strong RIII, または weak RIII) における不変量となる」という主張を示し、具体例を計算した。

球面曲線 (unoriented generic immersed spherical curve) を考える (例は図 1)。以下、記号 P, P' は球面曲線を表すものとする。

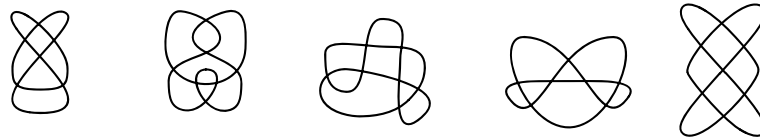


図 1: 球面曲線の例

よく知られていることとして次がある: 任意の 2 つの球面曲線は 3 種類の射影されたライデマイスター移動 RI, RII, RIII (図 2) からなる有限列で移り合う (up to ambient isotopy)。ここまで、交点の上下の情報を抜いたライ

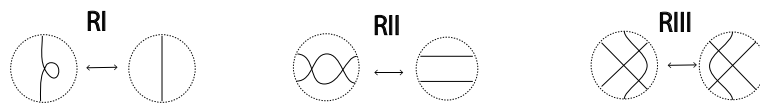


図 2: 3 種類のライデマイスター移動 RI, RII, RIII

デマイスター移動を「射影されたライデマイスター移動」と呼んでいるが、誤解は少ないと思われるので、以降はそのまま「ライデマイスター移動」と呼ぶことにする。

*本研究は科研費 (S)24224002(研究代表者 坪井俊) からの補助を受けました。また本講演のスライドと報告集では図のソースファイルの一部を瀧村祐介氏 (学習院中等科) から頂いて使用しました。

[†]email:noboru@ms.u-tokyo.ac.jp, 所属: 東京大学 大学院数理科学研究科 〒 153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1.

この3種類のライデマイスター移動は、詳しく見ると5種類のライデマイスター移動だと捉えられる¹。球面曲線が1-componentであることを使うとライデマイスター移動をする円盤の外側のつながり方を点線で描くことで図示される(図3)²。5種類のライデマイスター移動により、 2^5 通りの同値関

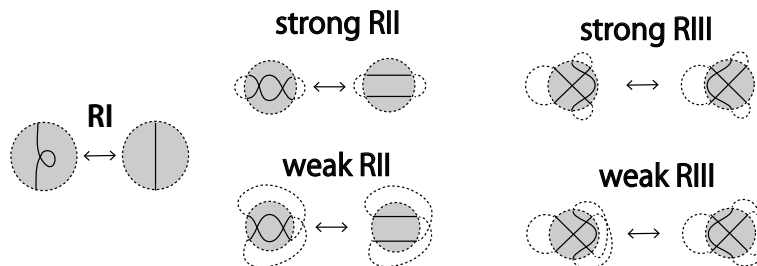


図3: 5種類のライデマイスター移動 RI、weak RII、strong RII、weak RIII、strong RIII

係が考えられる。すなわち、ライデマイスター移動を m (≤ 5) 種類選んで固定したとき、それに応じて、次の同値関係が考えられる。

2つの球面曲線 P と P' が同値である

$\stackrel{\text{def}}{=} P$ と P' が m 種類のライデマイスター移動を有限回使うことで移り合う (up to ambient isotopy)。

2^5 通りのうち、非自明な分類問題を与えるのは20種類の同値関係であることが知られており [13] (I.-Takimura, 2017)、トポロジカルに重要な問題をいくつか含んでいることも明らかになってきている。これらは例えば微分構造の入れ方と RI との相性の問題もあって精密な議論を展開するにはどうしても個別の議論をする必要がある。しかしながら、本研究ではバシリエフ不変量の考え方を背景にしてより統一的・構造的な不変量の作成方法を与えることを目指した。以下、必要な定義を行う(本報告では、“徹底的な厳密さ”よりも“雰囲気なるべく早く掴む手軽さ”を優先した。厳密な記述は [8] (I., preprint) でおこなった)。

¹以前より何件か問い合わせがあったので、この“5種類”の背景や“weak”の呼称について注釈を付しておく。Östlund は向きのある結び目射影図のライデマイスター移動と有限型不変量の研究から、ライデマイスター移動の精密化に関する考察をしており、結び目射影図から有限型不変量を作るためには有限型不変量の不変性の check に RII に対応するライデマイスター移動が不要だろう、という考えに到達している [14] (Östlund, 2001)。そもそも結び目不変量たちには補空間やコホモロジーのように3次元で作成される一面と結び目射影図で考える一面があり、その差を丁寧に見たいというモチベーションは必要に迫られ、でてくるものである。Östlund より前には Arnold が RII を2種類に分けて Vassiliev 不変量の曲線版を考察しており、RII を2種類に分けるのは Legendrian knot の考察にとって由緒正しいことが明らかになっている [1] (Arnold, 1994)。また Viro はある“積分”を用いて Arnold 不変量の一般化(量子化)をする中できわめて自然な形で RIII を2種類にわけるとの考えに到達している [15] (Viro, 1996)。Arnold 不変量のトポロジカルな意味での拡張は Seifert splice を施して得られた state に関する Alexander numbering を用いており、不変性が“当たり前”のものとしてでてくる RIII の1ケースが“weak”である。

²講演では球面曲線の向きを用いて図示した。

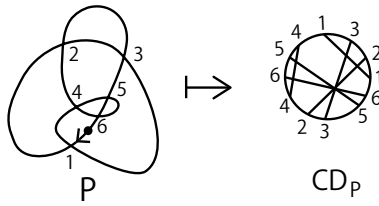


図 4: 球面曲線 P とコード図 CD_P

定義 1. コード図とは円周上 2 個ずつペアとなる点配置のことである (up to ambient isotopy, up to reflection)。球面曲線 P のコード図 CD_P とは 2 重点の逆像の配置が定めるコード図のことである (具体例は図 4)。

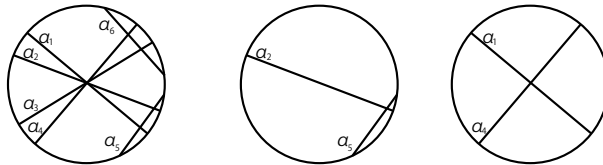


図 5: コード図と部分コード図

球面曲線に発生するライデマイスター移動は一般には無限通り発生するので、その不変性の check を有限回の check に落とし込みたい。そこで (歴史的によく使われてきた方法を踏まえて) 部分コード図の counting を考える (具体例は図 5)。部分コード図を数え上げる関数を (応用数学の見地も鑑みてコンピューターの計算に伸びていくように) わかりやすく定義するには、とりあえず (現時点では) ワードによる取り扱いが適切だと考えられる。

定義 2. 長さ n のワード とは写像 $w : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{N}$ のこととする。表示はよく使われる $w(1)w(2)\dots w(n)$ を用いる。ワードの letter とは w の像の元のことである。長さ $2n$ のガウスワードとは、各 letter (n 個) がちょうど 2 回現れるワードのことである。2 つのガウスワード w, v が isomorphic であるとは、全単射 $f : w(2n) \rightarrow v(2n)$ が存在して次を満たすことである：

$$\exists t \in \mathbb{Z}, \exists \epsilon \in \{0, 1\} \text{ s.t. } v \circ (\text{cyc})^t \circ (\text{rev})^\epsilon = f \circ w.$$

ただし、cyc と rev は次で定める：

$$\text{cyc}(p) \equiv p + 1 \pmod{2n}, \text{rev}(p) \equiv -p + 1 \pmod{2n}.$$

ガウスワード v の同型類は $[v]$ と表すことにする。定義からガウスワード v の同型類 $[v]$ とコード図は同一視されることがわかる (図 6)。

定義 3. $G_{<\infty}$ をコード図全体からなる集合とし、 $G_{<\infty}$ と $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ の間に全単射を固定する。 $G_{\leq d}$ を $\{CD \in G_{<\infty} \mid CD \text{ が高々 } d \text{ chords を持つ}\}$ とす

$$\begin{array}{c}
 [1212] \leftrightarrow \left(\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array} \right) \oplus \textcircled{1} \oplus \textcircled{2} (= \textcircled{1} \otimes \textcircled{2}) \\
 (= [8383])
 \end{array}$$

図 6: コード図の同一視による様々な表示例。矢印で書いたのは、表示が4つあることをあわらしており、等号はガウスワードの同型またはコード図の同型から導かれる等号を表している。

る。 $n_d = |G_{\leq d}|$, $G_{b,d} = G_{\leq d} \setminus G_{\leq b-1}$ とする。ガウスワード G に対して数 $\tilde{x}(G)$ を次で定める：

$$\tilde{x}(G) = \begin{cases} 1 & [G] = x \\ 0 & [G] \neq x \end{cases}$$

定義からガウスワード F_1 と F_2 が $[F_1] = [F_2]$ を満たすと $\tilde{x}(F_1) = \tilde{x}(F_2)$ となることが直ちにわかる。よってこれは $\tilde{x}([F_1])$ と書くことを許す (well-defined だから)。

定義 4. ガウスワード G に対して $\text{Sub}(G) = \{H \mid H : G \text{ からいくつか文字を消したもの}\}$ とする。コード図 $x \in \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ に対して、 $\text{Sub}(G)$ の部分集合 $\{H \mid H \in \text{Sub}(G), [H] = x\}$ を $\text{Sub}_x(G)$ とする。 $\text{Sub}_x(G)$ の要素の個数を $x(G)$ と定義する。

定義から G と同型な G' に対して $x(G) = x(G')$ である。よって G, G' を表すコード図 CD に対して $x(CD)$ と書いても良い (well-defined だから)。これらを総合すると $CD = [G]$ に対して、整数値関数 $x(CD)$ は

$$x(CD) = \sum_{z \in \text{Sub}(G)} \tilde{x}(z) \tag{1}$$

となる。

最後に関数 $x(CD)$ が不変量となるための十分条件を書くために relator を定義する。

定義 5. relator $\in \mathbb{Z}[G_{<\infty}]$ を図7によって定義する (厳密にはガウスワードを書いて定義されるが、ここではその記述は [8](I., preprint) にゆずるものとする)。図7にあるように、Relator は5種類で Type (I) relator, Type (SII) relator, Type (WII) relator, Type (SIII) relator, Type (WIII) relator と呼ぶ。5種類の relator に対応してそれぞれの全体集合に次の記号を与える。すなわち $R_1 = \text{Type (I) relators 全体の集合}$, $R_2 = \text{Type (SII) relators 全体の集合}$, $R_3 = \text{Type (WII) relators 全体の集合}$, $R_4 = \text{Type (SIII) relators 全体の集合}$, $R_5 = \text{Type (WIII) relators 全体の集合}$ 。この上で $R_{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 \epsilon_5}$ を $R_{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 \epsilon_5} = \cup_{\epsilon_i=1} R_i$ と定義する。さらに $R_{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 \epsilon_5}(b, d) = O_{b,d}(R_{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 \epsilon_5})$

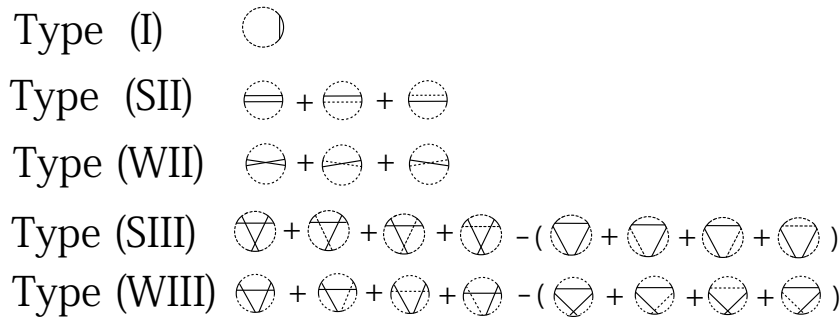


図 7: Relators

とする。ただし、 $O_{b,d}$ は「 $b \leq$ コードの数 $\leq d$ 」を満たすコード図のみを残す projection とする。

定義 5 からすぐにわかるものの、主定理 (定理 1) の証明に効いている補題 1、その直接の帰結である命題 1 を記載しておく。

補題 1. もし $n_{b-1} + 1 \leq i \leq n_d$ ならば、任意の $r \in \mathbb{Z}[G_{\leq l}]$ について

$$\tilde{x}_i(r) = \tilde{x}_i(O_{b,d}(r)).$$

命題 1. 自然数 b, d ($2 \leq b \leq d$) に対して、 $\sum_{n_{b-1} \leq i \leq n_d} \alpha_i x_i$ を上記で定めたものとする。 $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5) \in \{0, 1\}^5$ を勝手に選ぶ。 $R_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5}$ は定義 5 で定めたものとする。次の (1), (2) は同値である。

- (1) $\sum_{n_{b-1} \leq i \leq n_d} \alpha_i \tilde{x}_i(r) = 0$ ($\forall r \in R_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5}$).
- (2) $\sum_{n_{b-1} \leq i \leq n_d} \alpha_i \tilde{x}_i(r) = 0$ ($\forall r \in R_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5}(b, d)$).

主結果を述べる。

定理 1. 自然数 b, d ($2 \leq b \leq d$) に対して、 $\sum_{n_{b-1} \leq i \leq n_d} \alpha_i x_i$ を上記で定めたものとする。 $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5) \in \{0, 1\}^5$ を勝手に選ぶ。 $R_{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5}$ は定義 5 で定めたものとする。

$\epsilon_j = 1$ ならば

$$\sum_{n_{b-1} \leq i \leq n_d} \alpha_i \tilde{x}_i(y) = 0$$
 ($\forall y \in R_{0 \dots 0 \epsilon_j 0 \dots 0}(b, d)$) と仮定する。

このとき $\sum_{n_{b-1} \leq i \leq n_d} \alpha_i x_i$ は $\epsilon_j = 1$ となるすべての (射影された) ライデマイスター移動の整数値不変量となる。

ここでは R_{10000} の場合についてのみ証明のスケッチをお見せする。そのことにより、一般の場合も似たような形で証明される、という全体の雰囲気をお伝えする。

(R_{10000} の場合について証明のスケッチ) P と P' を球面曲線を 1 回の RI で折り合う球面曲線とし、 P を交点が多い方とする。このとき (定義 1、2 により)、ガウスワード G 、letter i が存在して (図 6 によるコード図とガウス

ワードの同型類の間にある同一視により) $CD_P = [Gii]$ 、 $CD_{P'} = [G]$ とかける。

ここで定義4の記号 $\text{Sub}(G)$ を思い出してほしい。この letter i が入らない G の部分ワード全体からなる集合 $\text{Sub}^{(0)}(G)$ 、 i が入る G の部分ワード全体からなる集合 $\text{Sub}^{(1)}(G)$ が発生し、 G の部分ワード全体からなる集合 $\text{Sub}(G)$ を (自然に) 分割する：

$$\text{Sub}(G) = \text{Sub}^{(0)}(G) \sqcup \text{Sub}^{(1)}(G). \quad (2)$$

以下、第1等号では式(1)、第2等号で(2)を使うと次を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{n_{b-1}+1 \leq i \leq n_d} \alpha_i x_i(P) &= \sum_{n_{b-1}+1 \leq i \leq n_d} \sum_{z \in \text{Sub}(G)} \alpha_i \tilde{x}_i(z) \\ &= \sum_{n_{b-1}+1 \leq i \leq n_d} \alpha_i \left(\sum_{z_0 \in \text{Sub}^{(0)}(G)} \alpha_i \tilde{x}_i(z_0) + \sum_{z_1 \in \text{Sub}^{(1)}(G)} \alpha_i \tilde{x}_i(z_1) \right). \end{aligned}$$

任意の Gii の部分ワード z_1 は G の部分ワード z_0 を用いて書かれているはずだから $\text{Sub}^{(1)}(G) = \{z_0ii \mid z_0 \in \text{Sub}^{(0)}(G)\}$ となる。以下、第1等号については上記の続き、第2等号については z_1 が z_0ii と書けるとした今の注意、第3等号については定義3直後で説明した書き換えを使い、次を得る。

$$\begin{aligned} &\sum_{n_{b-1}+1 \leq i \leq n_d} \alpha_i x_i(P) \\ &= \sum_{n_{b-1}+1 \leq i \leq n_d} \alpha_i \left(\sum_{z_0 \in \text{Sub}^{(0)}(G)} \alpha_i \tilde{x}_i(z_0) + \sum_{z_1 \in \text{Sub}^{(1)}(G)} \alpha_i \tilde{x}_i(z_1) \right) \\ &= \sum_{n_{b-1}+1 \leq i \leq n_d} \alpha_i \left(\sum_{z_0 \in \text{Sub}^{(0)}(G)} \alpha_i \tilde{x}_i(z_0) + \sum_{z_0 \in \text{Sub}^{(0)}(G)} \alpha_i \tilde{x}_i(z_0ii) \right) \\ &= \sum_{n_{b-1}+1 \leq i \leq n_d} \alpha_i \left(\sum_{z_0 \in \text{Sub}^{(0)}(G)} \alpha_i \tilde{x}_i([z_0]) + \sum_{z_0 \in \text{Sub}^{(0)}(G)} \alpha_i \tilde{x}_i([z_0ii]) \right). \end{aligned}$$

相手の P' に対しても同様な (ただし、上記よりもずっと容易な) 計算をする。以下、第1等号では式(1)、第2等号では $\text{Sub}(G')$ が $\text{Sub}^{(0)}(G)$ と同一視できることを使い、第3等号は定義3直後で説明した書き換えを使い、次を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{n_{b-1}+1 \leq i \leq n_d} \alpha_i x_i(P') &= \sum_{n_{b-1}+1 \leq i \leq n_d} \sum_{z' \in \text{Sub}(G)} \alpha_i \tilde{x}_i(z') \\ &= \sum_{n_{b-1}+1 \leq i \leq n_d} \sum_{z_0 \in \text{Sub}^{(0)}(G)} \alpha_i \tilde{x}_i(z_0) \\ &= \sum_{n_{b-1}+1 \leq i \leq n_d} \sum_{z_0 \in \text{Sub}^{(0)}(G)} \alpha_i \tilde{x}_i([z_0]). \end{aligned}$$

上記 $\sum_{n_{b-1}+1 \leq i \leq n_d} \alpha_i x_i(P)$ と $\sum_{n_{b-1}+1 \leq i \leq n_d} \alpha_i x_i(P')$ の計算結果を比べて

$$\begin{aligned} & \sum_{n_{b-1}+1 \leq i \leq n_d} \alpha_i x_i(P) - \sum_{n_{b-1}+1 \leq i \leq n_d} \alpha_i x_i(P') \\ = & \sum_{n_{b-1}+1 \leq i \leq n_d} \sum_{z_0 \in \text{Sub}^{(0)}(G)} \alpha_i \tilde{x}_i([z_0 ii]). \end{aligned} \quad (3)$$

今、仮定から

$$\sum_{n_{b-1}+1 \leq i \leq n_d} \alpha_i \tilde{x}_i(r) = 0 \quad (\forall r \in R_{10000}(b, d)).$$

命題 1 から、

$$\sum_{n_{b-1}+1 \leq i \leq n_d} \alpha_i \tilde{x}_i(r) = 0 \quad (\forall r \in R_{10000}).$$

よって、

$$\sum_{n_{b-1}+1 \leq i \leq n_d} \sum_{z_0 \in \text{Sub}^{(0)}(G)} \alpha_i \tilde{x}_i([z_0 ii]) = 0.$$

したがって (3) より、

$$\sum_{n_{b-1}+1 \leq i \leq n_d} \alpha_i x_i(P) = \sum_{n_{b-1}+1 \leq i \leq n_d} \alpha_i x_i(P').$$

□

例 1. 具体例を見ておく。行列 $(\tilde{x}_i(r_j))$ ($r_j \in R_{00010}(2, 3)$) を書くと図 8 の形になる (ただし $i \in \mathbb{N}$ は必要であれば順番を付け替えて図 8 の順番にする)。

$$\begin{array}{c} \otimes + 3\otimes - 3\ominus - \ominus \quad \otimes + \oplus - 2\otimes \quad 3\otimes - 2\oplus - \ominus \\ \tilde{\otimes} \left[\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ \tilde{\oplus} \\ \tilde{\otimes} \end{array}$$

図 8: $(\tilde{x}_i(r_j))_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3}$.

この \ker を計算すると、かつて [10] (I.-Takimura, 2015) により与えられた、(prime 7 交点以下の spherical curve を RI, strong RIII の同値関係で完全に分類するくらい強い) 不変量 $3\oplus - 3\otimes + \otimes$ が 1 つでてくる。rank の計算 (例えばよく使われる掃き出し法) から不変量の個数がわかる。非自明なもののみを取り出すには知られている簡単な球面曲線のガウスワードを代入すればよい。

RIが入らない球面曲線の面白いクラスは Arnold, Viro 等、数多くの論文で扱われている。ここでは以下、RIが入った球面曲線で特に面白いクラスを3つ挙げておく。

(例1) RI と RIII のクラス。

このクラスは Östlund 予想「任意の平面曲線は (up to isotopy で) RI と RIII により単純閉曲線になるだろう」があった。本報告書2 ページ目の注釈にも書いたように結び目の有限型不変量の理論の基礎部分に関わっている。このクラスで「即座に判別できる」という意味で決定された同値類はまだない。Östlund 予想は [6](Hagge-Yazinski, 2014) により最小交点が 16 の反例が与えられた (図 9(左))。その後、最小交点が 15 の反例は [12](I.-Takimura, 2016) により与えられた (図 9(右))³。なお、この論文 [12](I.-Takimura, 2016) で最小交点が 15 以上の奇数交点、偶数交点ともに非自明な曲線が存在することまでわかっている (交点 14 以下では Östlund 予想の反例が存在するか、わかっていない)。

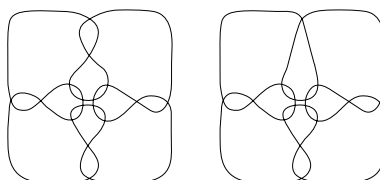


図 9: 左は 16 交点, 右は 15 交点の反例

(例 2) RI, weak RII, weak RIII のクラス。

驚くべきことに、このクラスでも「即座に判別できる」という意味で決定された同値類はまだ一つもない。花木良の trivializing number $tr(P)$ [4] (Hanaki, 2010) と canonical genus $g(P)$ を用いて、不変量

$$tr(P) - 2g(P)$$

が見つかり、無限個の同値類の存在が示された [11] (I.-Takimura, 2015)。prime spherical curve を交点の小さい方から見ていくと最初の非自明な同値類の代表元は 7_4 (図 10) である。例えば計算すると $tr(7_4) - 2g(7_4) = 2$ となり 0 とはならない。さらに任意の 0 以上の偶数に値をもつ prime spherical curve が見つかっている [11]。ただし、課題もある。例えば関数 $tr(P) - 2g(P) = 0$ となるような P のなす集合については決定されていない。また一般には tr の計算が即座に定まらないので、さらなる tr の評価法や、異なる不変量の研究、あるいは本講演の前に行われた船越紫の講演 [2]、あるいは橋爪恵の講演 [5] のような distance の設定と、その解明が強く望まれる。なお、球面曲線における distance は最近になって初めて導入された [3] (Funakoshi-Hashizume-I.-Kobayashi-Murai, preprint)。

³横山知郎によって、その存在の可能性が最初に指摘された。

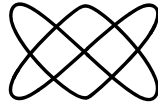


図 10: RI, weak RIII, weak RIII の同値関係において prime 7 交点以下で唯一非自明な 7_4 。

(例 3) RI, weak RIII のクラス。

このクラスは positive knot とダイレクトな関係がある。すなわち、球面曲線の交点すべてを positive crossing にする操作 (positive 化) を行ったときの positive knot diagram に入る move は knot のライデマイスター移動に含まれ (図 11)、それにより次の map f が誘導される。

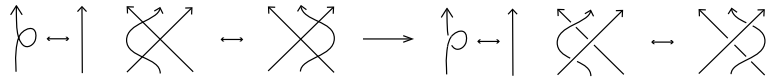


図 11: RI, weak RIII を positive 化により、knot のライデマイスター移動の一部になるようす

$f : (1, \text{weak } 3) \text{ class} \mapsto \text{positive knot isotopy class}$

これに対して、次の問題は未解決である。

問 1 (S. Kamada, Y. Nakanishi, 2013)). 上記の f は単射か?

例えば、unknot では 1 対 1 だと示されている [9] (I.-Takimura, 2013) が、ほかの同値類ではよくわかっていない。

また図 11 からわかるように、このクラスの positive knot との関連性により、結び目の Vassiliev 不変量のなすベクトル空間の次元の評価を与えるサンプルクラスとして役立つことが期待される。

謝辞 このような機会を与えてくださった本研究集会のオーガナイザーである、東京女子大学の大山淑之先生、新國亮先生に感謝申し上げます。

参考文献

- [1] V. I. Arnold, Topological invariants of plane curves and caustics. University Lecture Series, 5. *American Mathematical Society, Providence, RI*, 1994, viii+60 pp.
- [2] Y. Funakoshi, Complexes induced from spherical curves and distances, 「結び目の数学 X」講演.

- [3] Y. Funakoshi, M. Hashizume, N. Ito, T. Kobayashi, and H. Murai, A distance on the equivalence classes of spherical curves generated by deformations of type RI, preprint.
- [4] R. Hanaki, Pseudo diagrams of knots, links, and spatial graphs, *Osaka J. Math.* **47** (2010), 863–883.
- [5] M. Hashizume, On equivalence classes of spherical curves by Reidemeister moves I and III, 「結び目の数学 X」講演.
- [6] T. Hagge and J. Yazinski, On the necessity of Reidemeister move 2 for simplifying immersed planar curves, *Banach Center Publ.*, 103, 2014.
- [7] N. Ito, Knot projections, CRC press, 2016, xix+200pp.
- [8] N. Ito, Space of chord diagrams on spherical curves, preprint.
- [9] N. Ito and Y. Takimura, (1, 2) and weak (1, 3) homotopies on knot projections, *J. Knot Theory Ramifications* **22** (2013), 1350085, 14pp.
- [10] N. Ito and Y. Takimura, Sub-chord diagrams of knot projections, *Houston J. Math.* **41** (2015), 701–725.
- [11] N. Ito and Y. Takimura, Strong and weak (1, 2, 3) homotopies on knot projections, *Internat. J. Math.* **26** (2015), 1550069, 8pp.
- [12] N. Ito and Y. Takimura, On a nontrivial knot projection under (1, 3) homotopy, *Topology Appl.* 210 (2016), 22–28.
- [13] N. Ito and Y. Takimura, Thirty-two equivalence relations on knot projections, *Topology Appl.* 225 (2017), 130–138.
- [14] O-P. Östlund, Invariants of knot diagrams and diagrammatic knot invariants, Thesis (Ph.D.)–Upsala University, 2001.
- [15] O. Viro, Generic immersions of the circle to surfaces and the complex topology of real algebraic curves, *Topology of real algebraic varieties and related topics*, 231–252, *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 1996.