

ハンドル体結び目の摂動的 \mathfrak{sl}_2 不変量と種数 2 の場合の計算方法

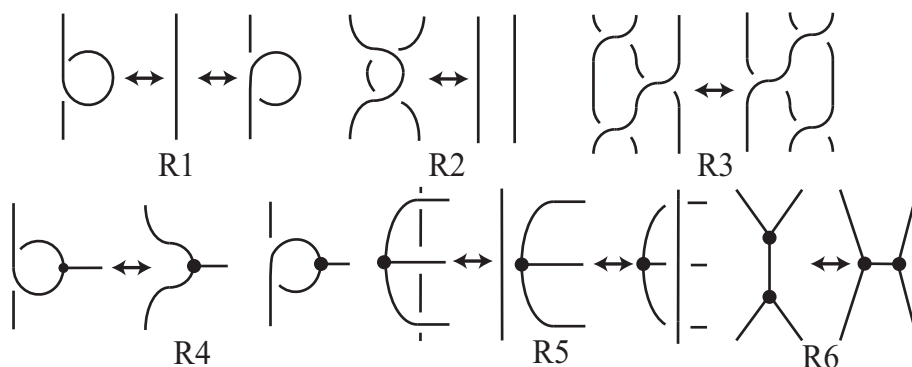
阿部 翠空星

概要

ハンドル体結び目に対して量子 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 不変量が 3 次元多様体の量子 $SU(2)$ 不変量に似た形で定義されている。従って、摂動展開を用いて摂動的 \mathfrak{sl}_2 不変量を定義することは自然な流れである。この不変量は量子 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 不変量から導くため、不変量の強さはその量子不変量より強くなることはない。しかし、既に定義された量子 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 不変量を正規化と和を制限することにより元の不変量よりはるかに強い摂動的な不変量を導く。例えば、補空間が同相なハンドル体結び目 5_1 と 6_4 を区別することができる。本報告書では (数論的な) 摂動展開を解説し、今後のハンドル体結び目と空間グラフに対する今後の問題提起をおこなう。

1 序章

種数 g のハンドル体を 3 次元球面に埋め込んだ像を種数 g のハンドル体結び目という。2 つのハンドル体結び目が isotopic であるとき同じハンドル体結び目とみなす。 $g = 1$ のときは、通常の結び目と同値になる。従って、ハンドル体結び目理論は、種数に関する結び目理論の自然な一般化になる。ハンドル体結び目理論は結び目理論での Reidemeister 移動 R1~R3 だけでなく Reidemeister 移動 R4~R6 でも不変でなければならないため不変量の構成が結び目理論より難しい。ハンドル体結び目としては異なるものであっても補空間が同相となるものが存在する [LL]。つまり、3 次元多様体の「同相」による分類問題よりはるかに難しい問題である。



本報告書では種数 2 のハンドル体結び目に対して、量子 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 不変量と摂動的な不変量を復習し、新しい摂動的 \mathfrak{sl}_2 不変量を種数 2 の場合 (現段階では種数が 3 以上の場合は計算が難しい理由も述べる。) のハンドル体結び目に対して計算する方法を略証で紹介していく。詳細な証明は [A] を参照してほしい。

2 深謝

東京女子大学現代教養学部 数理科学科 数学専攻教授大山 淑之先生・同学科教授新國 亮先生には研究集会「結び目の数学 X」の発表の機会を頂いた。ここに感謝の意を表す。

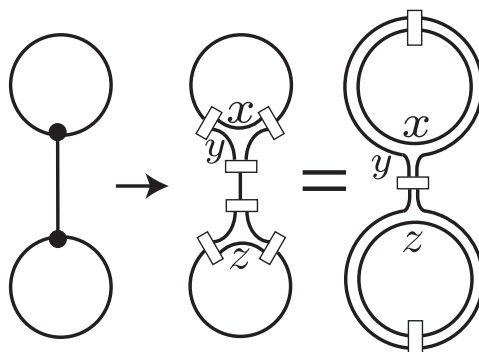
3 ハンドル体結び目の量子 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 不変量

Definition 3.1. (Jones-Wenzl 冪等元) Temperley-Lieb 代数の元で $n + 1$ 本のひも上の特別な元 (箱で表す) を以下のように両端に $n + 1$ 個の端点を持つ図式の線型和で, 帰納的に定義する. この元を Jones-Wenzl 冪等元という.

$$\begin{array}{|c|} \hline n+1 \\ \hline \text{[Diagram: a box with a vertical bar on the right side]} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \text{[Diagram: a box with a vertical bar on the right side]} \\ \hline n \\ \hline \end{array} - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \begin{array}{|c|} \hline 1 \quad 1 \\ \hline \text{[Diagram: a box with two vertical bars on the right side]} \\ \hline n \quad n \\ \hline \end{array}$$

ここで, 数 n が横にかかっているひもは, そこに平行なひもがあることを表し, $\Delta_n = (-1)^n(A^{2(n+1)} - A^{-2(n+1)})/(A^2 - A^{-2})$ で定める.

Definition 3.2. 0 以上の整数を color という. グラフの辺に color を対応させたグラフを colored graph という. 3 個の colored graph の射影図を図のように Jones-Wenzl 冪等元を用いて閉曲線の線型和と見なす. 3 個頂点は admissible 条件を満たすものしか考えない.



ここで, admissible 条件とは以下の不等式を満たす整数 x, y, z である.

$$\begin{aligned} 0 \leq x, \quad 0 \leq y, \quad 0 \leq z, \\ x + 2y \leq p - 2, \quad z + 2y \leq p - 2. \end{aligned}$$

以下, 3 以上の整数 p に対して 3 次元多様体の量子不変量のと看同様に $A = -q^{1/4} = -\exp(\pi\sqrt{-1}/2p)$ とする. これにより, 図式 D が $p - 1$ 本のひも上の Jones-Wenzl 冪等元を含むとき, $\Delta_{p-1} = 0$ が成り立つことと Temperley-Lieb 代数の生成元を考えると $\langle D \rangle = 0$ となる. ここで, $\langle \rangle$ は Kauffman bracket である.

実際に以下の $\theta(x, y, z)$ の Kauffman bracket を計算すると

$$\theta(x, y, z) := \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram: A circle with three arcs labeled } x, y, z \text{ connecting the top, right, and bottom points respectively.} \end{array} \right\rangle$$

$$= \frac{\Delta_{x+y+z}! \Delta_{x-1}! \Delta_{y-1}! \Delta_{z-1}!}{\Delta_{y+z-1}! \Delta_{x+z-1}! \Delta_{x+y-1}!}$$

となる．ここで， $\Delta_n! = \Delta_n \Delta_{n-1} \cdots \Delta_0$ ， $\Delta_{-1}! = 1$ である．ハンドル体結び目の射影図の3個頂点を Jones-Wenzl 冪等元で閉曲線の線型和とした．種数2のハンドル体結び目に対しては3本の閉曲線に x, y, z と coloring したものを $D(x, y, z)$ とする．

Theorem 3.3 ([MM]). $\overline{D(x, y, z)}$ を $D(x, y, z)$ の鏡像とする．整数 p に対して，次の値は種数2のハンドル体結び目 H の量子 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 不変量である．

$$\langle H \rangle_p^{\mathfrak{sl}_2} := \sum_{y=0}^{\lfloor \frac{p-2}{2} \rfloor} \sum_{x=0}^{p-2y-2} \sum_{z=0}^{p-2y-2} \Delta_{x+y} \Delta_{2y} \Delta_{z+y} \frac{\langle D(x, y, z) \rangle \langle \overline{D(x, y, z)} \rangle}{\theta(x, y, y) \theta(z, y, y)} \in \mathbb{C} \quad (1)$$

自明なハンドル体結び目である Handcuff に対してこの不変量を計算すると以下のようになる．

Example 3.4.

$$\langle \text{Handcuff} \rangle_p^{\mathfrak{sl}_2} = \left(\frac{2p}{\zeta - \zeta^{-1} - 2} \right)^2$$

量子 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 不変量はハンドル体結び目の交点数が多くなるのと， p の値が大きくなるにつれて計算が難しくなる．実際の計算は以下の公式を用いてハンドル体結び目を絡み目にしてしまうことで若干，計算しやすくなる．

$$\left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram: Three horizontal strands labeled } i, j, k \text{ with a square box at the right end.} \end{array} \right\rangle = \frac{1}{\theta(x, y, z)} \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram: Three horizontal strands labeled } i, j, k \text{ with a square box at the right end, connected to a circle with a square box at the bottom.} \end{array} \right\rangle \quad (2)$$

ここで，3個頂点では $x = (j + k - i)/2$ ， $y = (i + k - j)/2$ ， $z = (i + j - k)/2$ である．また，

$$N = \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram: A circle with a square box at the bottom.} \end{array} \right\rangle = \sum_{n=0}^{p-2} \Delta_n \left\langle \begin{array}{c} \text{Diagram: A circle with a square box at the bottom.} \end{array} \right\rangle$$

と定める．

Remark 3.5. 量子 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 不変量は補空間が同相なハンドル体結び目に対しては同じ値をとる．ハンドル体結び目の補空間の閉包の2つのコピーを境界で自然に張り合わせてできる閉多様体の WRT 不変量と同じ不変量である．

Remark 3.6. 量子 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 不変量は変数が x, y, z の3変数にわたり和を計算している。しかし, $x = z$ としても Reidemeister 移動 RI~RVI で不変であることが証明できる。 $x = z$ と仮定しても RI, RIV での不変性は $\langle D(x, y, z) \rangle \overline{\langle D(x, y, z) \rangle}$ と関式とその鏡像を掛けることによって不変である。 RII, RIII, RV での不変性は Kauffman bracket の性質から不変である。 RVI での不変性は 6j-symbol の “直交性” の性質から不変である。

Definition 3.7. H の量子 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 不変量を Handcuff(正規化定数) で割り, $0 \leq y \leq p-2$ としたものを

$$\tau_p^{\mathfrak{sl}_2}(H) := \frac{\langle H \rangle_{2p}^{\mathfrak{sl}_2}}{\langle \text{Handcuff} \rangle_p^{\mathfrak{sl}_2}} \in \mathbb{C}$$

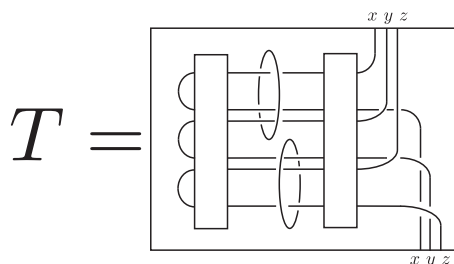
とする。

Theorem 3.8 ([A]). p を奇素数, $\zeta = e^{2\pi i/p}$ とする。

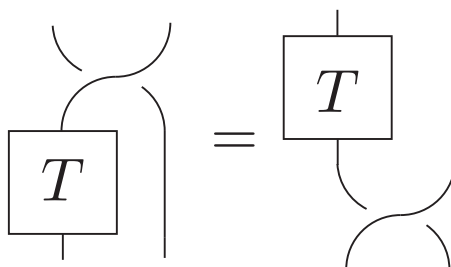
$$\tau_p^{\mathfrak{sl}_2}(H)|_{q=\zeta} \in \mathbb{Z}[\zeta]$$

証明の方針

種数2のハンドル体結び目は(2)を使って3価頂点を消去して閉曲線の Kauffman bracket を計算することになる。閉じた時にこの絡み目に isotopic になるようなタングル T を以下の図のように定める。



ここで, 白い部分は絡み目である。 $\overline{\langle D(x, y, z) \rangle}$ と $\langle D(x, y, z) \rangle$ の積なので framing が0であることが重要である (framing があるとガウス和があらわれてしまう)。



上記の関係式から普遍 $U_\zeta(\mathfrak{sl}_2)$ 不変量である $Q^{U_\zeta(\mathfrak{sl}_2);*}(T)$ は $U_\zeta(\mathfrak{sl}_2)$ の中心の元であることがわかる。 $U_\zeta(\mathfrak{sl}_2)$ の中心は c という元で生成されることが知られている。 よって量子 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 不変量は

$$\rho_{v_{x+y+z}}(c^k) = (\zeta^{(x+y+z)/2} + \zeta^{-(x+y+z)/2})^k \cdot \text{id}_{v_{x+y+z}}$$

の trace を計算して x, y, z について和をとることで求められる。ところで,

$$\sum_{x=0}^{p-1} \sum_{y=0}^{p-1} \sum_{z=0}^{p-1} [x]^2 [y]^2 [z]^2 (\zeta^{j(x+y+z)/2} + \zeta^{-j(x+y+z)/2}) \equiv \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{(\zeta - 1)^i}{i} \right)^{3(p-1)}$$

$$p = u \cdot (\zeta - 1)^{p-1}$$

である (u は $\mathbb{Z}[\zeta]$ の単元). 従って, $\langle \text{Handcuff} \rangle_p^{sl_2} = \left(\frac{2p}{\zeta - \zeta^{-1} - 2} \right)^2$ で割っても $\mathbb{Z}[\zeta]$ の元であることがわかる. 詳細は [A] を参照してほしい.

4 摂動的不変量

定理 3.8 より $\tau_p^{sl_2}(H)|_{q=\zeta} \in \mathbb{Z}[\zeta]$ であるから

$$\tau_p^{sl_2}(H) = a_{p,0}(H) + a_{p,1}(H)(\zeta - 1) + a_{p,2}(H)(\zeta - 1)^2 + \dots$$

のように整数 $a_{p,l}(H)$ を用いて $\tau_p^{sl_2}(H)$ の値を展開することができる. この展開は一意ではないが,

$$T(q) = \binom{p}{1} + \binom{p}{2}(q-1) + \binom{p}{3}(q-1)^3 + \dots + \binom{p}{p}(q-1)^{p-1}$$

とすると $\mathbb{Z}[\zeta] \cong \mathbb{Z}[q]/T(q)$ であるから $(a_{p,l}(H) \bmod p) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は $\tau_p^{sl_2}(H)$ の値から一意に定まる. 奇素数 p と整数 a, b に対して, $ax \equiv b \pmod{p}$ の解 x は一意であるから $x = \frac{b}{a}$ と書くことにする. $m < p$ とすると環 $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{m}]$ を定義できる. 有理ホモロジー球面 N に対する量子 $SO(3)$ 不変量を $\tau_p^{SO(3)}(N) \in \mathbb{Z}[\zeta]$ とすると上記と同様に考えると

$$a_{p,l}(N) \equiv \left(\frac{|H_1(N; \mathbb{Z})|}{p} \right) \lambda_l(N) \pmod{p}$$

となる素数 $p \geq \max\{2l+1, |H_1(N; \mathbb{Z})|\}$ によらない不変量 $\lambda_i(N) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{m}]$ が存在する. N の摂動的不変量が

$$\text{f-lim} \tau_p^{SO(3)}(N) = \tau^{SO(3)}(N) = \lambda_0(N) + \lambda_1(N)(q-1) + \lambda_2(N)(q-1)^2 + \dots \in \mathbb{Q}[[q-1]]$$

と定義されている. 結び目 K に対して, colored Jones 多項式を $J_n(K; q)$ とすると以下の摂動的不変量が存在することが知られている.

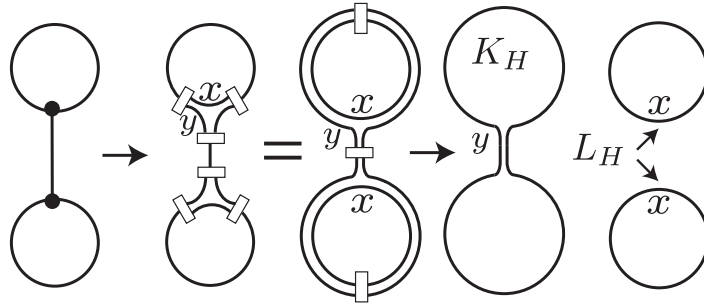
Theorem 4.1 ([O]).

$$\text{f-lim} \frac{\zeta - \zeta^{-1} - 2}{2p} \cdot \sum_{y=0}^{p-2} \Delta_y^2 J_y(K; \zeta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+c}{1-c} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\text{Res}_{t=c} \frac{(t+t^{-1}-2)P_l(t)}{t \cdot \Delta_K(t)^{2l+1}} \right) (q-1)^l \in \mathbb{C}[[q-1]]$$

ここで $P_l(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ であり, $\Delta_K(t)$ は K の Alexander 多項式, c は 0 または $\Delta_K(t)$ の零点とする.

5 主定理と計算例

Definition 5.1. 種数 2 のハンドル体結び目から以下のように得られる結び目と絡み目を K_H, L_H とする.



K_H, L_H は H から一意には決まらないことに注意してほしい。ここで, Remark3.6 から $x = z$ としてもハンドル体結び目の不変量である。

Theorem 5.2 ([A]). 種数 2 のハンドル体結び目 H の $x = z$ とした摂動的 \mathfrak{sl}_2 不変量 $\tau^{\mathfrak{sl}_2}(H)$ は以下のようになる。

$$\tau^{\mathfrak{sl}_2}(H) := \text{f-lim}_p \tau_p^{\mathfrak{sl}_2}(H) = \sum_s \text{f-lim} \left(\left(\frac{\zeta - \zeta^{-1} - 2}{2p} \right)^2 \cdot \left(\sum_{x=0}^{p-2} \Delta_x(\zeta^{xs} + \zeta^{-xs}) \langle L_H \rangle \right. \right. \\ \left. \left. \sum_{x=0}^{p-2} \Delta_x(\zeta^{xs} + \zeta^{-xs}) \langle \bar{L}_H \rangle + \sum_{y=0}^{p-2} \Delta_y(\zeta^{ys} + \zeta^{-ys}) \langle K_H \rangle \sum_{y=0}^{p-2} (\zeta^{ys} + \zeta^{-ys}) \frac{\Delta_y}{\Delta_{2y}} \langle \bar{K}_H \rangle \right) \right)$$

証明の方針

$\varphi_1(t) = \varphi_1(t^{-1}), \varphi_2(t) = \varphi_2(t^{-1})$ をみたす多項式として, $N = \min\{\deg\varphi_1(t), \deg\varphi_2(t)\}$, $p > \max\{\deg\varphi_1(t), \deg\varphi_2(t)\}$ とする。このとき,

$$\frac{1}{p} \sum_{n \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \varphi_1(\zeta^{n+1}) \varphi_2(\zeta^{n+1}) = \frac{1}{p} \sum_{n \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \varphi_1(\zeta^{n+1}) \frac{1}{p} \sum_{n \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \varphi_2(\zeta^{n+1}) \\ + 2 \sum_{s=1}^N \frac{1}{2p} \sum_{n \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} (\zeta^{(n+1)s} + \zeta^{-(n+1)s}) \varphi_1(\zeta^{n+1}) \frac{1}{2p} \sum_{n \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} (\zeta^{(n+1)s} + \zeta^{-(n+1)s}) \varphi_2(\zeta^{n+1})$$

が成り立つので, $x = z$ とした $\tau_p^{\mathfrak{sl}_2}(H)$ は以下の等式が使える形に変形できる。

$$\langle \left(\begin{array}{c} i \\ \diagdown \quad \diagup \\ \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} i \\ \diagup \quad \diagdown \\ \end{array} \right) \rangle = \sum_k \frac{\Delta_{x+y}}{\theta(x, y, y)} \langle \left(\begin{array}{c} i \\ \diagdown \quad \diagup \\ \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} i \\ \diagup \quad \diagdown \\ \end{array} \right) \rangle_k \quad (3)$$

ここで, 3 個頂点を (3) を使って分離するとき 2 通りの分け方がある。それらが K_H と L_H となる。colored Jones 多項式と $\langle \rangle$ との関係は $\langle K_H \rangle = [y] J_y(K_H; \zeta)$, $\langle L_H \rangle = [x] J_x(L_H; \zeta)$ であることが知られている。定理 4.1 から摂動的 \mathfrak{sl}_2 不変量 $\tau^{\mathfrak{sl}_2}(K_H, c)$, $\tau^{\mathfrak{sl}_2}(L_H, c)$ が存在し, 定理が導かれる。詳細は [A] を参照してほしい。

Remark 5.3. $\tau_p^{\mathfrak{sl}_2}(H)$ は適切に正規化しておく必要がある。式 (3) を使い最終的に和を $0 \leq x \leq p-2$ または $0 \leq y \leq p-2$ のみとっているので 1 回 p で割るだけで十分である。しかし, 上記の証明の方針からわかるように結果的に摂動的不変量は Handcuff(正規化定数) で割ることで求められることに注意して欲しい。

$c = 0$ として具体的な種数 2 のハンドル体結び目に対して計算すると L_H が等しいものは $P_1(t)$, $P_2(t)$ の比較的次数が低い値が異なるので簡単に区別できる. しかし, 補空間が同相な 5_1 と 6_4 のハンドル体結び目は区別できない. そこで, $c = e^{\pi\sqrt{-1}/3}$ として計算すると,

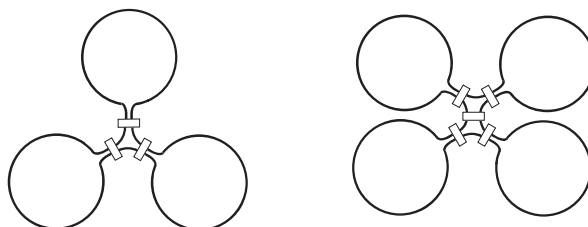
$$\tau^{sl_2}(5_1, c) = \left(\frac{2\sqrt{-1}}{27\sqrt{3}} + \sum_s \frac{2\sqrt{-1}}{81} \left(2\sqrt{3} \cos^2 \frac{\pi s}{3} - \frac{9s}{2} \sin \frac{2\pi s}{3} + 3\sqrt{3}s^2 \sin^2 \frac{\pi s}{3} \right) (\zeta - 1) + O((\zeta - 1)^2) + C \right)$$

$$\tau^{sl_2}(6_4, c) = \left(\frac{\sqrt{-1}}{3\sqrt{3}} + \sum_s \frac{2\sqrt{-1}}{3\sqrt{3}} \cos^2 \frac{\pi s}{3} \right) (\zeta - 1) + O((\zeta - 1)^2) + C$$

となり判別ができる. これにより L_H が等しい 6 交点以下のハンドル体結び目はすべて判別できる.

6 今後の課題と予想

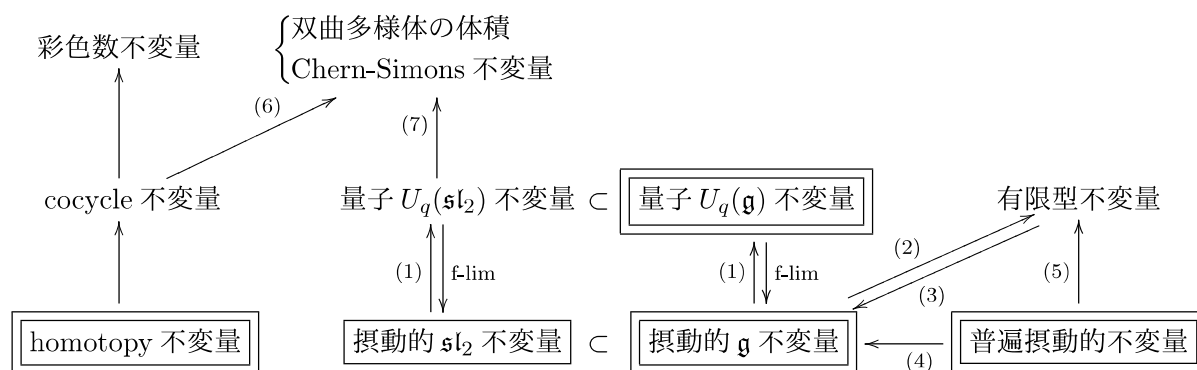
種数 3, 4 の場合は以下の形を計算すればよい. しかし, 式 (3) のような式が存在しないため計算が難しい.



Problem 6.1. (有限型不変量の改良) 摂動的な不変量の係数は有限型不変量であるか. また, それはハンドル体結び目のどのような同値関係であるか.

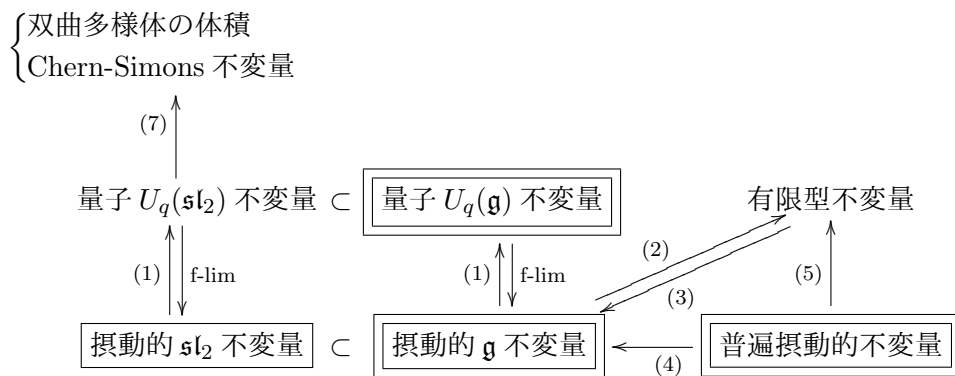
Problem 6.2. (摂動的 \mathfrak{g} 不変量) 一般の半単純リー環 \mathfrak{g} に対して, $\tau^{\mathfrak{g}}(H)$ は存在するか.

この問題は \mathfrak{g} に対して, planar graph などを用いて式 (3) が成り立つことを示せば十分である. まとめると以下のような不変量の相関図が成り立つことが予想される.



ここで、四角で囲まれていない不変量は既に定義されたハンドル体結び目の不変量である。□は今回定義した不変量、□は今後定義されると予想される不変量である。図の中の矢印は、不変量から矢印の先の不変量が導けることを表している。つまり、矢印の元のほうが強い不変量である。図の(1)~(7)は次のような予想である。(1)「Lawrence 予想」の類似。(2)係数が有限型不変量という予想。(3)Weight system が定義されるという予想。(4)「LMO 予想」の類似。(5)任意の有限型不変量が導けるという予想。(6)双曲体積または、Chern-Simons 不変量になる cocycle が存在するという予想。(7)「体積予想」の類似。同様に、空間グラフに対しての応用が考えられる。

Problem 6.3. 空間グラフに対して、以下の図は成立するか。



参考文献

- [A] S.Abe, *Perturbative invariants of genus two handlebody-knots*, in preparation.
- [LL] J.H.Lee and S.Lee, *Inequivalent handlebody-knots with homeomorphic complements*, *Algebr. Geom. Topol.* **12** (2012), 1059–1079.
- [MM] A.Mizusawa and J.Murakami, *Invariants of handlebody-knots via Yokota’s invariants*, *J. Knot Theory Ramifications* **22** (2013), 1350068, 21 pp.
- [O] T. Ohtuki, *Perturbative invariants of 3-manifolds with the first Betti number 1*, *Geometry & Topology* **14** (2010) 1993–2045.

E-mail address:k9250979@kadai.jp