

# A Characterization of Alternating Link Exteriors

坂井 駿介 (広島大学)\*

## 1. Introduction

Ralph Fox は, 図式的に定義された交代絡み目の内在的な特徴づけを問うた. 最近, Greene [4] と Howie [5] が独立に, 交代絡み目の張る曲面を使って Fox 問題に回答を与えた.

本稿では, 交代絡み目の外部空間を立方複体を用いて特徴づける. 重要な役割を果たすのは, Aitchison 複体と Dehn 複体である. 絡み目の連結な図式に対して, 絡み目外部空間の立方体分割を与える方法がある. これは Aitchison によって考案され, Agol [2], Adams [1], Thurston [7], 横田 [8, 9] らによって使われてきた. 本稿では, この立方複体を **Aitchison 複体** と呼ぶことにする. 立方体分割の詳しい方法と背景は作間-横田 [6] にある.

我々は “signed colored” 立方複体 (以下, SC-立方複体) という概念を導入する. 2次元 SC-立方複体とそれに付随する 3次元 SC-立方複体を定義し, これらを用いて Dehn 複体と Aitchison 複体を記述する. 主定理で, 与えられた 3次元 SC-立方複体がある交代絡み目外部空間を表す Aitchison 複体と同相であるための必要十分条件を述べる (定理 4.1). これは立方複体を用いた交代絡み目外部空間の特徴づけを意味する (系 4.2).

## 2. Intuitive Description of Aitchison Complexes for Alternating Links

ここでは, 交代絡み目の外部空間を表す Aitchison 複体の構成を直感的に説明する.  $\Gamma \subset S^2$  を連結な交代絡み目図式とし,  $L \subset S^3$  を  $\Gamma$  が表す交代絡み目とする.  $E(L) = S^3 \setminus \text{int } N(L)$  を  $L$  の外部空間とする (ここで  $N(L)$  は  $L$  の開正則近傍である).  $S^3 \setminus S^2$  の 2つの連結成分から 1つずつ点  $P_+, P_-$  をとる. これらはそれぞれ  $S^2$  の上と下にあるとみなす.  $S^3 \setminus \{P_+, P_-\}$  を  $S^2 \times \mathbb{R}$  と同一視する. 図式  $\Gamma$  は  $S^2 \times \{0\}$  上の 4価グラフとみなす.  $L$  は投影平面  $S^2 \times \{0\}$  と  $2n$  個の点で横断的に交わるとする (ここで  $n$  は  $\Gamma$  の交点数である).

$\Gamma$  の各頂点  $x$  に対して, 正方形  $s \subset S^2 = S^2 \times \{0\}$  を考える. これは  $x$  の  $(S^2, \Gamma)$  内での相対正則近傍を成し,  $s$  の 4つの頂点は  $x$  の周りの 4つの辺の germ 上にある.  $x^+, x^-$  をそれぞれ  $\Gamma$  の頂点  $x$  の上と下にある  $L$  の点とする.  $\text{join } x^+ * s$  を “upper pyramid”  $\Delta^+$  とし,  $\text{join } x^- * s$  を “lower pyramid”  $\Delta^-$  とする (図 2).  $\Delta^\pm \cap L = \{x^\pm\}$ ,  $\Delta^+ \cap \Delta^- = s$  としよ.  $\{\Delta_1^\pm, \dots, \Delta_n^\pm\}$  を  $L$  の crossing arc の周りに位置する,  $S^3$  内の  $2n$  個の pyramid の集合とする.

ここで, 相対イソトピーがあることを考察する. 図式  $\Gamma$  の辺  $e$  を 1つ選び, その端点を  $x_1, x_2$  とする (図 1).  $e$  に対応する  $L$  の弧を  $\tilde{e}$  とし, その端点を  $x_1^+, x_2^-$  とする.  $w = \tilde{e} \cap S^2$  を  $\tilde{e}$  の中点とみなす. 垂直な線分  $wP_+, wP_-$  を考える. 次のような  $(S^3, L)$  内

---

キーワード: 交代絡み目, 立方複体

\* 〒739-8526 広島県東広島市鏡山 1-3-1 広島大学 大学院理学研究科  
e-mail: shunsuke463@gmail.com

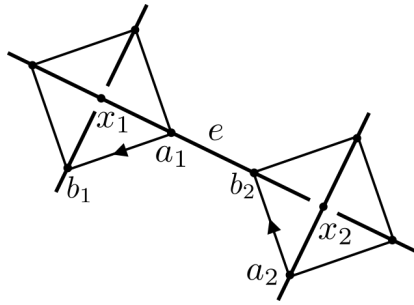


図 1

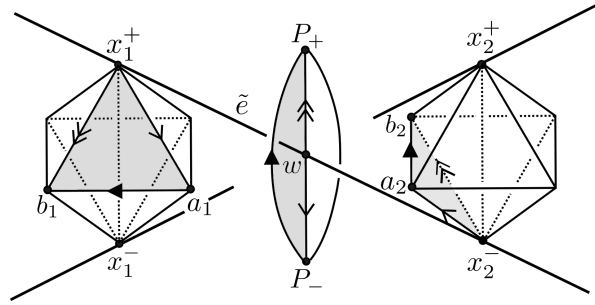


図 2

の相対イソトピーが存在する (図 2) :

$$\Delta x_1^+ a_1 b_1 \sim \Delta w P_- P_+ \sim \Delta x_2^- a_2 b_2.$$

これらのイソトピーは  $\Delta x_1^+ a_1 b_1$  から  $\Delta x_2^- a_2 b_2$  への同相写像を誘導する.  $x_i^\pm$  の十分小さい近傍を取り除くことで,  $\Delta_i^\pm$  から立方体  $O_i^\pm$  を得る.  $\{\Delta_i^+ \cup \Delta_i^-\}_i$  の面の間の同相写像は, 立方体  $\{O_i^\pm\}_i$  の貼り合わせ情報を誘導する.  $\mathcal{A}(\Gamma)$  を面の間の貼り合わせ情報をもつ立方複体  $\{O_i^\pm\}_i$  とし,  $\mathcal{D}(\Gamma)$  を正方形  $\{s_i = O_i^+ \cap O_i^-\}_i$  からなる  $\mathcal{A}(\Gamma)$  の部分複体とする.

**命題 2.1.** •  $\mathcal{A}(\Gamma)$  は  $E(L)$  の立方体分割を与える.

- 変形レトラクション  $r: E(L) \rightarrow \mathcal{D}(\Gamma)$  が存在し,  $\mathcal{A}(\Gamma)$  は  $r|_{\partial E(L)}$  の写像柱と同一視される.
- $\mathcal{A}(\Gamma)$  と  $\mathcal{D}(\Gamma)$  が非正曲率をもつことの必要十分条件は, 図式  $\Gamma$  が素であることである.

実は,  $\mathcal{D}(\Gamma)$  は  $\Gamma$  の Dehn 複体と同相である (Dehn 複体の定義は [3] を見よ).  $\mathcal{A}(\Gamma)$  を  $\Gamma$  の Aitchison 複体と呼ぶ.

### 3. Signed Colored Complexes

この節で, SC-立方複体の概念を導入する.

**定義 3.1.** SC-正方形 (signed colored square) とは, 次の情報を持った正方形  $s := [0, 1]^2$  である :

- 頂点  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  は符号  $-$  を, 頂点  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  は符号  $+$  をもつ.
- 水平な辺  $I \times \{0\}$ ,  $I \times \{1\}$  は符号  $B$  (Black) を, 垂直な辺  $\{0\} \times I$ ,  $\{1\} \times I$  は符号  $W$  (White) をもつ.

各 SC-正方形  $s$  に対し,  $s$  の各辺は  $-$  頂点から  $+$  頂点に向きづけられているとする. SC-正方形の  $n$  個のコピー  $s_1, \dots, s_n$  を考え, その集合を  $S$  とする.

SC-正方形の貼り合わせ情報を決定する.  $S$  に含まれる SC-正方形の  $+$  頂点の集合を  $V_+(S)$ ,  $-$  頂点の集合を  $V_-(S)$  とし, SC-正方形の辺の集合を  $E(S)$  とする.  $V_+(S)$  から  $V_-(S)$  への全単射  $\varphi$  を考える.  $\varphi$  は次のようにして全単射  $\Phi: E(S) \rightarrow E(S)$  を誘導する (図 3). ある  $+$  頂点  $v$  をとる.  $v$  は  $\varphi$  によって  $-$  頂点  $\varphi(v)$  にうつされる. このとき,  $v$

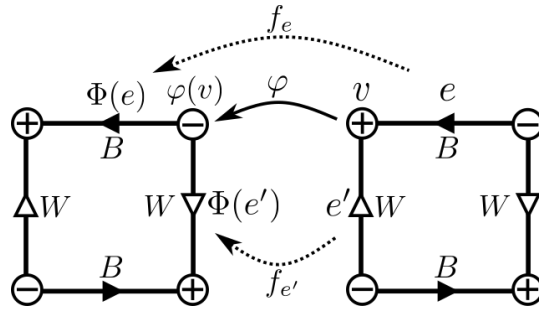


図 3

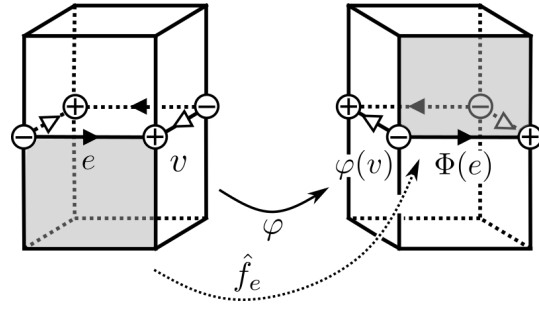


図 4

を終点にもつ  $B$  辺  $e$  がただ 1 つ存在し, 一方  $\varphi(v)$  を終点にもつ  $B$  辺がただ 1 つ存在する. この  $B$  辺を  $\Phi(e)$  と定義する.  $W$  辺に対しても同様に,  $v$  を終点にもつただ 1 つの  $W$  辺  $e'$  に対し,  $\varphi(v)$  を終点にもつ  $W$  辺  $\Phi(e')$  がただ 1 つ定義される. よって,  $\varphi$  は“色を保つ”全単射  $\Phi$  を誘導する. 各  $e \in E(S)$  に対して,  $f_e: e \rightarrow \Phi(e)$  を向きを保つ同相写像とする. これらの同相写像の集合  $\{f_e: e \rightarrow \Phi(e)\}_{e \in E(S)}$  を SC-正方形  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  の貼り合わせ情報とみなす.

**定義 3.2.** 上のようにして  $(S, \varphi)$  から得られる立方複体を 2次元 SC-立方複体 (signed colored squared complex) と呼び,  $\mathcal{C}^2(S, \varphi)$  と表す.

$\mathcal{C}^2(S, \varphi)$  に付随する 3次元 SC-立方複体を定義する. 各 SC-正方形  $s \in S$  に対し,  $s \times [0, 1]$  を“上 SC-立方体 (upper signed colored cube)”,  $s \times [-1, 0]$  を“下 SC-立方体 (lower signed colored cube)” とする.  $\mathcal{C}^2(S, \varphi)$  の SC-正方形の集合  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  に対し,  $C_+ = \{s_i \times [0, 1]\}_{i=1}^n$  を上 SC-立方体の集合とし,  $C_- = \{s_i \times [-1, 0]\}_{i=1}^n$  を下 SC-立方体の集合とする.

$F(C_{\pm})$  を SC-立方体の面の集合とする. 各辺  $e \subset s$  に対し, SC-立方体の面は  $e \times [0, 1]$  または  $e \times [-1, 0]$  で表される. 次のように定めることで, 全単射  $\Phi: E(S) \rightarrow E(S)$  は面の間全単射  $\hat{\Phi}: F(C_-) \rightarrow F(C_+)$  を誘導する (図 4):

$$\hat{\Phi}(e \times [-1, 0]) = \Phi(e) \times [0, 1].$$

また次の式によって, 同相写像  $f_e: e \rightarrow \Phi(e)$  は面の間同相写像  $\hat{f}_e: e \times [-1, 0] \rightarrow \Phi(e) \times [0, 1]$  を誘導する:

$$\hat{f}_e(x, t) = (f_e(x), -t) \quad (x \in e, t \in [-1, 0]).$$

これらの同相写像の集合  $\{\hat{f}_e: e \times [-1, 0] \rightarrow \Phi(e) \times [0, 1]\}_{e \in E(S)}$  を SC-立方体  $C_+ \cup C_-$  の貼り合わせ情報とみなす.

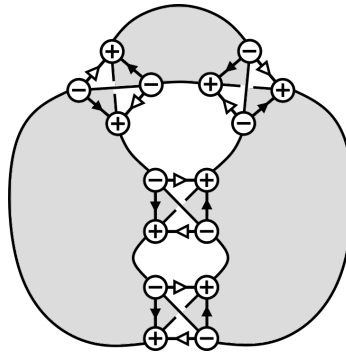


図 5

**定義 3.3.** 上のようにして  $(S, \varphi)$  から得られる立方複体を 3次元 SC-立方複体 (signed colored cubed complex) と呼び,  $\mathcal{C}^3(S, \varphi)$  と表す.

このとき, 2次元 SC-立方複体  $\mathcal{C}^2(S, \varphi)$  は付随する 3次元 SC-立方複体  $\mathcal{C}^3(S, \varphi)$  の部分複体であり,  $\mathcal{C}^3(S, \varphi)$  から  $\mathcal{C}^2(S, \varphi)$  への自然な変形レトラクションが存在する.

Dehn 複体と Aitchison 複体が SC-立方複体であることを確認する. SC-正方形とその貼り合わせ情報が絡み目図式から定まることをみればよい (図 5).  $\Gamma \subset S^2$  を連結な  $n$  交点交代絡み目図式とする. 図式に白黒彩色を施す. このとき, 付随する黒色曲面が  $\Gamma$  の各交点で右半ひねりのバンドをもつようにする.  $S$  を  $\Gamma$  の頂点の相対正則近傍  $\{s_1, \dots, s_n\}$  の集合とする. 各近傍において, underpass 上にある頂点に符号  $+$  を, overpass 上にある頂点に符号  $-$  を与える. さらに, 黒領域上にある辺に符号  $B$  を, 白領域上にある辺に符号  $W$  を与える. よって, これらの近傍は SC-正方形とみなすことができる.  $\Gamma \setminus \bigcup_{i=1}^n \text{int}(s_i)$  は,  $+$  頂点と  $-$  頂点を結ぶ弧の非交和である. これらの弧の端点を対応させることで  $\varphi: V_+(S) \rightarrow V_-(S)$  が定まる. SC-立方複体の構成方法から次を得る.

**命題 3.4.** 2次元 SC-立方複体  $\mathcal{C}^2(S, \varphi)$  は  $\Gamma$  の Dehn 複体  $\mathcal{D}(\Gamma)$  と同相である. 付随する 3次元 SC-立方複体  $\mathcal{C}^3(S, \varphi)$  は  $\Gamma$  の Aitchison 複体  $\mathcal{A}(\Gamma)$  と同相である.

#### 4. Characterization

**定理 4.1.**  $S$  を SC-正方形の集合とし,  $\varphi: V_+(S) \rightarrow V_-(S)$  を全単射とする. 3次元 SC-立方複体  $\mathcal{C}^3(S, \varphi)$  がある連結な交代図式  $\Gamma \subset S^2$  の Aitchison 複体と同相であるための必要十分条件は,  $\varphi$  が誘導する全単射  $\Phi: E(S) \rightarrow E(S)$  が次の等式を満たすことである:

$$|E(S)/\langle \Phi \rangle| = |S| + 2. \quad (*)$$

ただし,  $E(S)/\langle \Phi \rangle$  は  $\Phi$  から誘導される巡回群  $\langle \Phi \rangle$  の  $E(S)$  への作用の軌道空間を表す.

*Proof.* 条件が十分であることを示す. 3次元 SC-立方複体  $\mathcal{C}^3(S, \varphi)$  がある連結な交代図式  $\Gamma \subset S^2$  の Aitchison 複体と同相であると仮定する. SC-正方形の集合  $S$  と全単射  $\varphi$  は 3 節と同様に  $\Gamma$  から構成されるとする.

ここで,  $\Phi$  の誘導する巡回群  $\langle \Phi \rangle$  の  $E(S)$  への作用を考える. 1つの軌道に含まれる辺は図式  $\Gamma$  の同じ領域に属するので, 群作用の軌道と  $\Gamma$  の領域は 1対1対応の関係にあることがわかる.

投影平面  $S^2$  の  $\Gamma$  によるセル分割を考え、 $S^2$  のオイラー標数を計算する。SC-正方形は  $\Gamma$  の各頂点に対応するので、頂点の数は  $|S|$  である。  $\Gamma$  の表す絡み目の埋め込みの逆像  $S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1$  を考える。  $\Gamma$  の  $|S|$  個の頂点の逆像は  $2|S|$  個の点であり  $S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1$  を  $2|S|$  に分割する。 よって、辺の数は  $2|S|$  である。 面の数は図式の領域の数であり、上の考察よりそれは  $|E(S)/\langle \Phi \rangle|$  である。 一方、  $\chi(S^2) = 2$  より、

$$2 = \chi(S^2) = |S| - 2|S| + |E(S)/\langle \Phi \rangle|$$

である。 よって、式 (\*) を得る。

条件が必要であることを示す。 式 (\*) が成り立つとする。  $\mathcal{C}^3(S, \varphi) \cong \mathcal{A}(\Gamma)$  となるような連結な交代図式  $\Gamma \subset S^2$  を、次のように構成する。 各 + 頂点  $v$  に対し、  $v$  と  $\varphi(v)$  を結ぶ 1-セル  $\gamma_v$  を貼りつける。 各 SC-正方形に対し、 - 頂点同士を結ぶ overpass と + 頂点同士を結ぶ underpass を貼りつける。 各軌道に対して、軌道に含まれる辺の間には頂点を結ぶ 1-セル  $\gamma_v$  が必ず存在するので、  $\Gamma$  上に simple 1-cycle をとることができる。 この 1-cycle に沿って 2-セルを貼りつける。 このようにして得られる 2次元セル複体を  $M$  とする。  $\{\gamma_v\}_{v \in V_+(S)} \cup \{\text{overpasses}\} \cup \{\text{underpasses}\}$  は明らかに  $M$  上で連結な交代図式である。

$M$  が  $S^2$  と同相であることを確かめる。  $M$  が向き付け可能な 2次元多様体であることはすぐにわかる。 よって、オイラー標数  $\chi(M)$  を計算する。 以下、  $|S| = n$  とおく。 各 SC-正方形が 4 個の頂点をもつので、頂点の数は  $4n$  である。 辺の数は  $6n$  である。 これは、SC-正方形の  $4n$  個の辺と  $2n$  個の 1-セル  $\{\gamma_v\}_{v \in V_+(S)}$  からなる。 面の数は、  $n$  個の SC-正方形と  $|E(S)/\langle \Phi \rangle|$  個の 2-セルの和  $n + |E(S)/\langle \Phi \rangle|$  である。 よって、

$$\chi(M) = 4n - 6n + (n + |E(S)/\langle \Phi \rangle|) = -n + |E(S)/\langle \Phi \rangle|$$

であり、仮定より  $\chi(M) = 2$  がわかる。 したがって、  $M$  は  $S^2$  と同相である。 これで証明が完了した。  $\square$

よって、系として交代絡み目外部空間の特徴づけが得られる。

**系 4.2.** コンパクトな 3次元多様体  $M$  が連結な交代図式で表された交代絡み目  $L$  の外部空間と同相であることの必要十分条件は、  $M$  が次を満たす 3次元 SC-立方複体  $\mathcal{C}^3(S, \varphi)$  の底空間と同相であることである：  $|E(S)/\langle \Phi \rangle| = |S| + 2$ .

## 参考文献

- [1] C. Adams, *Noncompact Fuchsian and quasi-Fuchsian surfaces in hyperbolic 3-manifolds* *Algebr. Geom. Topol.* **7** (2007), 565–582.
- [2] I. Agol, *The classification of non-free 2-parabolic generator Kleinian groups*, Slides of talks given at Austin AMS Meeting and Budapest Bolyai conference, July 2002, Budapest, Hungary.
- [3] M. Bridson and A. Heffliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Springer-Verlag (1999).
- [4] J. Greene, *Alternating links and definite surfaces*, *Duke Math. J.* **166** (2017), 2133–2151.
- [5] J. Howie, *A characterisation of alternating knot exteriors*, *Geom. Tool.* **21** (2017), no. 4, 2353–2371.
- [6] M. Sakuma and Y. Yokota, *An application of non-positively curved cubings of alternating links*, to appear in *Proc. A.M.S.* arXiv: 1612.06973.

- [7] D. Thurston, *Hyperbolic volume and the Jones polynomial*, Notes from lectures at the Grenoble summer school Invariants des noeuds et de variétés de dimension 3, June 1999, available from <http://pages.iu.edu/~dpthurst/speaking/Grenoble.pdf>.
- [8] Y. Yokota, *On the potential functions for the hyperbolic structures of a knot complement*, Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto, 2001), 303–311, Geom. Topol. Monogr., **4**, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2002.
- [9] Y. Yokota, *On the complex volume of hyperbolic knots*, J. Knot Theory Ramifications **20** (2011), 955–976.