

Branched standard spine 上の S-stable 葉層の構成

半田 伸 (東北大学大学院理学研究科)

概要

奇数次元多様体上の完全非可積分な超平面場のことを接触構造という。向き付け可能な閉 3 次元多様体 M の branched standard spine P 上の S-stable 葉層に対し、それを定義する 1-形式から M 上の接触構造を構成できることが知られている。本稿では P の各辺に与えられた実数の情報に基づいて P 上の S-stable 葉層を構成する方法を述べる。

1 準備

1.1 接触構造

定義 1.1. $(2n + 1)$ 次元多様体 M 上の超平面場 ξ が局所的に $\alpha \wedge (d\alpha)^n \neq 0$ を満たす非特異 1-形式 α によって $\xi = \ker\alpha$ として定義されているとき、 ξ を接触構造 (contact structure) という。このような非特異 1-形式を接触形式 (contact form), (M, ξ) を接触多様体 (contact manifold) という。

例 1.2. \mathbb{R}^3 の直交座標 (x, y, z) に対して $\alpha_0 = dz + xdy$ とおくと、 $\xi_0 = \ker\alpha_0$ は \mathbb{R}^3 の接触構造となる (図 1)。

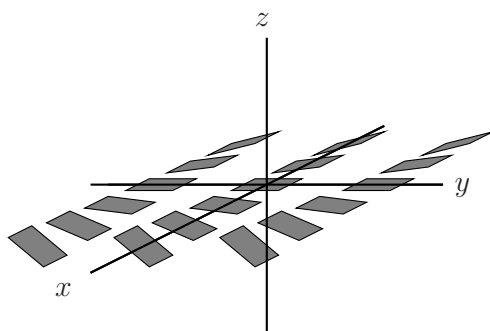


図 1 $\ker\alpha_0$

定義 1.3. 3 次元接触多様体 (M, ξ) に曲面 S を埋め込んだとき、接触平面と S との交わりによって生じる葉層を特性葉層と呼ぶ。このとき、 S 上の特性葉層を $\mathcal{F}_\xi(S)$ と表す。

曲面上の葉層はその上で定義される 1-形式によって与えられるが, 特性葉層を定める 1-形式は 3 次元多様体上の接触形式から与えられる.

例 1.4. \mathbb{R}^3 の接触構造 $\xi_1 = \ker(dz + r^2 d\theta)$ と, 接触多様体 (\mathbb{R}^3, ξ_1) に単位球面 S^2 を埋め込んだときの S^2 上の特性葉層を図 2 に示す.

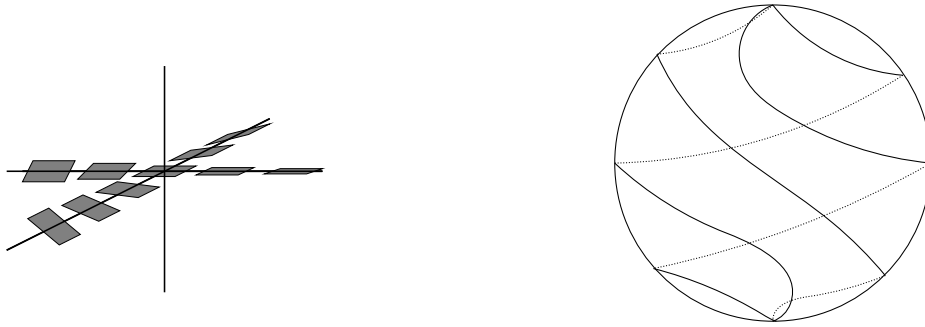


図 2 $S^2 \subset (\mathbb{R}^3, \xi_1)$ 上の特性葉層

1.2 3次元多様体の spine

ここでは, branched standard spine に関する定義を与える. 用語や記号は [2] に基づいている.

定義 1.5. 多面体 P が **simple** であるとは, P における各点の近傍が図 3 のいずれかのモデル (region, triple line, true vertex) と同相であることをいう. P の true vertex 全体の集合を $V(P)$ で表す. Triple line と true vertex の和集合を **singular set** といい, $S(P)$ と書く.

Simple polyhedron P が **standard** であるとは, $S(P) \setminus V(P)$ の連結成分が線分と同相であり (この線分を P の辺とよぶ), $P \setminus S(P)$ の各連結成分が円板と同相であることをいう (この円板を P の面とよぶ).

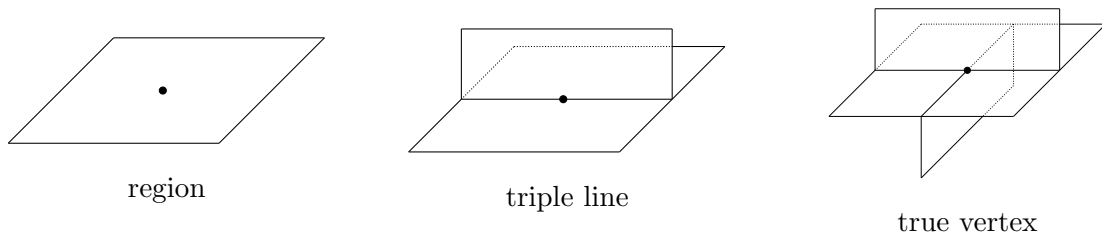


図 3 simple polyhedron の各点の近傍のモデル

定義 1.6. M を境界付き 3次元多様体, $P \subset M$ を standard polyhedron とする. M が P に縮約 (collapse) するとき, P は M の **standard spine** であるという. 閉 3次元多様体 \hat{M} に埋め込ま

れた standard polyhedron が \hat{M} の spine であるとは, P が $\hat{M} \setminus B^3$ の spine であることをいう.

定義 1.7. $P \subset M$ を境界付き多様体 M に埋め込まれた standard spine とする. P の各面の向き付けで, どの辺についても隣接する 3 つの面から同一の向きが入らないようなものが存在するとき, この向き付けを P の **branch 構造** と呼ぶ. Branch 構造を持つ standard spine を M の **branched standard spine** という.

Branched standard spine の各辺の向きは, 隣接する 3 つの region の向きに基づいて与えられる (図 4).



図 4 branch 構造から定まる triple line の向き

1.3 Branched standard spine 上の葉層

以下では, branched standard spine P 上の葉層を考えたい. P 上の葉層は $S(P)$ に対する接点を持つことが考えられるが, $S(P) \setminus V(P)$ における接点に対して図 5 のように $+1$, -1 の指数を定めることができる.

定義 1.8. Branched surface P 上の葉層 \mathcal{F} が **S-stable** であるとは, $S(P)$ 上に特異点が存在せず, $S(P) \setminus V(P)$ に対して指数 $+1$ の接点のみを持つことをいう.

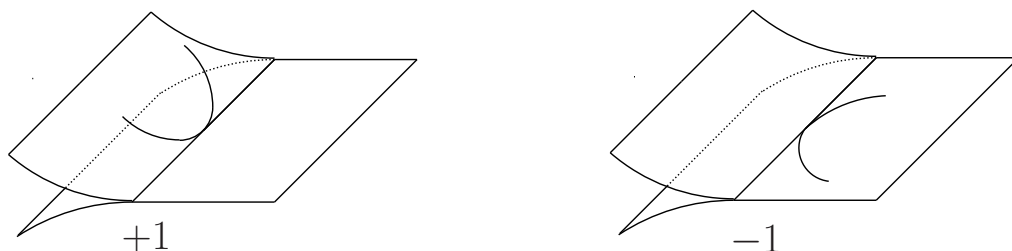


図 5 葉層の接点の指数

Benedetti, Petronio は, 閉 3 次元多様体 \hat{M} の branched standard spine P 上の S-stable 葉層を定める 1-形式から, \hat{M} 上の接触構造を構成できることを示した.

定理 1.9. (Benedetti, Petronio[1]) (1) P を閉 3 次元多様体 \hat{M} の branched standard spine, \mathcal{F}

を P 上の S-stable 葉層とし, \mathcal{F} は発散が 0 でない孤立特異点のみを持つとする. このとき, \hat{M} 上の接触構造 ξ で, $\mathcal{F}_\xi(P) = \mathcal{F}$ をみたすものが存在する. \hat{M} の異なる branched standard spine P' と P' の近傍の接触構造 ξ' が与えられて, (P, \mathcal{F}) と $(P', \mathcal{F}_\xi(P'))$ が微分同相であるとき, P と P' それぞれの近傍 U と U' と contactomorphism $\phi : (U, \xi|_U) \rightarrow (U', \xi'|_{U'})$ が存在する.

(2) (P, \mathcal{F}) を (1) と同様のものとし, \mathcal{F} から誘導される P の近傍における接触構造が tight であるとする. このとき, \hat{M} 上の tight な接触構造 ξ で, $\mathcal{F}_\xi(P) = \mathcal{F}$ をみたすものが存在する. さらに, P が flow-spine であり全ての特異点が正の発散を持つと仮定すると, P が ξ に対して faithful であるように ξ を選ぶことができる.

ここで, P が接触構造 ξ に対して faithful であるとは, P が ξ に横断的に交わる flow に対する flow-spine であることをいう. このとき, P は ξ の平面場としてのホモトピー類の情報を持つ.

2 主定理

2.1 S-stable 葉層の構成

定理 1.9 を用いて閉 3 次元多様体上の接触構造を得るために, branched standard spine P 上の葉層を構成することを考える.

定理 2.1. (H.) P を閉 3 次元多様体の branched standard spine とし, e_1, \dots, e_n を P の辺とする. $(E_1, \dots, E_n) \in \mathbb{R}^n$ が以下を満たすと仮定する.

条件 (*) 各面 Σ において, 境界となる辺に対応する実数の総和が正となる. ただし, 辺の向きが Σ に対して逆のときは, その値の符号を入れ替えて加える.

このとき, P 上の 1-形式 β で以下を満たすものが存在する.

- $\int_{e_i} \beta = E_i$.
- β によって定義される P 上の葉層は S-stable である.
- $d\beta > 0$.

はじめに, P における $S(P)$ の近傍 $\text{Nbd}(S(P); P)$ に 1-形式を与える.

補題 2.2. 定理 2.1 の仮定のもとで, $\text{Nbd}(S(P); P)$ における 1-形式 β_0 で, 以下を満たすものが存在する.

- $\int_{e_i} \beta_0 = E_i$.
- β_0 による葉層は, $S(P)$ に対して指数 +1 の接点のみを持つ.
- $d\beta > 0$.

証明の概略. \mathbb{R}^2 における極座標 (r, θ) を考え, \mathbb{R}^2 に 1-形式 $r^2 d\theta$ による葉層を与える. そして, $\text{Nbd}(S(P); P)$ の \mathbb{R}^2 への射影を適切に与え, その射影による $r^2 d\theta$ の引き戻しによって

Nbd($S(P)$; P) における 1-形式を与える.

まず, P の各頂点の近傍を \mathbb{R}^2 の同一円周上に射影する. ここで, singular set の向きが θ の正の方向と一致するように射影を与える. 続いて, 各辺の射影を対応する実数に基づいて図 7 のように与える. ここで, γ_0, γ_0' に沿った $r^2 d\theta$ の積分は 0 なので, Stokes の定理より γ に沿った積分値の絶対値は D_γ の面積に一致する. そこで, D_γ の面積が E_i に一致するように γ を取り, それを辺 e_i の像とする. ここで得られた射影を p とし, $\beta_0 = p^* r^2 d\theta$ とすればよい. また, $E_i < 0$ のときの射影の仕方に注意することで, ここで得られる Nbd($S(P)$; P) 上の葉層は指数 +1 の接点のみを持つようにすることができる. \square

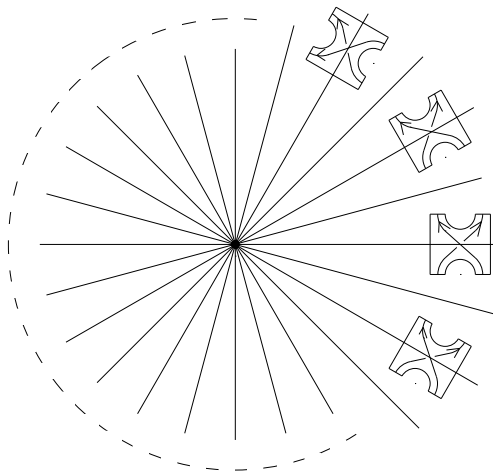


図 6 true vertex の近傍の射影

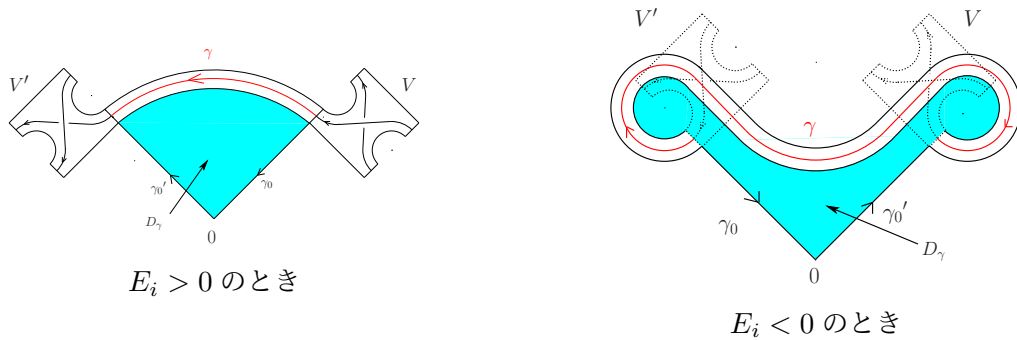


図 7 辺 e_i の像 γ

補題 2.2 で得られた葉層を, 以下を用いて P 上全体に拡張することで定理 2.1 が証明される.

補題 2.3. (Thurston, Winkelnkemper[4]) Σ を境界つき曲面とする. β_0 を $\partial\Sigma$ の Σ における近傍の 1-形式とし,

$$\int_{\partial\Sigma} \beta_0 > 0$$

を満たすとする。このとき、次を満たすような Σ 上の 1-形式 β が存在する:

- $\beta = \beta_0$ on $\text{Nbd}(\partial\Sigma; \Sigma)$
- $d\beta > 0$

証明. Σ 上の 1-形式 β_1 で, $\text{Nbd}(\partial\Sigma; \Sigma)$ において $\beta_1 = \beta_0$ となるものを取る. Stokes の定理より

$$\int_{\Sigma} d\beta_1 = \int_{\partial\Sigma} \beta_0 > 0.$$

Ω を, $\partial\Sigma$ の近傍で $\Omega = d\beta_0$ となる Σ の体積形式とする. このとき de Rham の定理より, $\partial\Sigma$ の近傍で 0 である Σ の 1-形式 β_2 が存在して, $\Omega - d\beta_1 = d\beta_2$ と表せる. ここで $\beta = \beta_1 + \beta_2$ とおけば, $d\beta = \Omega > 0$ であり, $S(P)$ の近傍で $\beta = \beta_p$ となる. \square

2.2 Branched standard spine 上の葉層の接点数

定理 2.1 の証明に用いた branched standard spine 上の葉層の構成方法に基づき, 以下が示される.

定理 2.4. (H.) P を閉 3 次元多様体の branched standard spine とし, $\#V(P) = 2m + 1$ とする. P のある面 Σ で, branch 構造から与えられる向きと Σ から与えられる向きが異なる $(2m + 1)$ 本の辺で囲まれているものが存在するとき, P 上の S-stable 葉層ですべての辺に横断的に交わるものは存在しない.

補題 2.2 における $\text{Nbd}(S(P); P)$ への 1-形式の構成について, 頂点の射影の方法を全て網羅することで定理 2.4 を証明する.

頂点の射影の仕方は, \mathbb{R}^2 上に与えられた葉層との関係から 4 通りに分類できる. これらの射影の仕方を, 図 8 のように type1 \pm , type2 \pm と呼ぶことにする. 以下の補題によって, \mathbb{R}^2 への葉層の与え方によらずに接点の有無を調べることができる (証明は省略する).

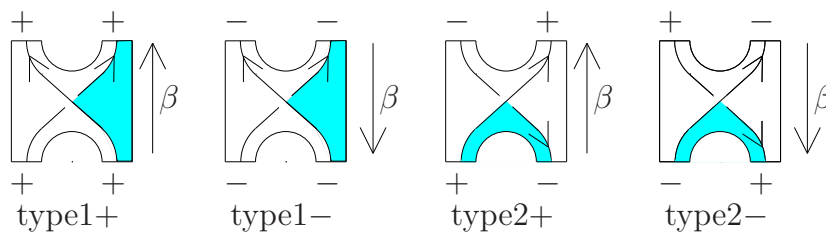


図 8 頂点の射影の分類

補題 2.5. $\gamma : [a, b] \rightarrow S(P)$ を branched surface P の辺, \mathcal{F} を P 上の S-stable 葉層とし, \mathcal{F} が P 上の 1-形式 β で与えられているとする. このとき, \mathcal{F} が γ に横断的に交わるならば, 任意の $t \in [a, b]$ に対して $\beta(\dot{\gamma}(t)) > 0$ であるか, 任意の $t \in [a, b]$ に対して $\beta(\dot{\gamma}(t)) < 0$ である.

図 8 に記した符号は、各辺の端点における速度ベクトルを β に代入した際の符号を表している。また、各モデルにおいて色つきで表された region は、定理 2.4 の Σ の位置である。triple line の向きは branch 構造から定まり、triple line の向きに対して左側には 2 枚の region (この 2 枚の region から辺の向きが誘導されている)、右側には 1 枚の region が隣接している。すなわち、定理 2.4 の Σ は必ず triple line の右側に存在する。

補題 2.6. P を閉 3 次元多様体の branched standard spine, e_1, \dots, e_n を P の辺とする。 P のある面 Σ で、branch 構造から与えられる向きと Σ から与えられる向きが異なるような奇数本の辺のみで囲まれているようなものが存在すると仮定する。このとき、次が成り立つ:

- (1) 条件 (*) を満たす $(E_1, \dots, E_n) \in \mathbb{R}^n$ で、全て正であるようなものは存在しない。
- (2) すべての頂点を type2 で射影した場合に P 上の S-stable 葉層ですべての辺に横断的に交わるものを得ることはできない。

証明. 面 Σ を囲む頂点と辺を図 9 のように V_1, \dots, V_{2k+1} , 辺を l_1, \dots, l_{2k+1} とおく。

(1) l_i に対応する実数を L_i とすると、面 Σ から得られる不等式が

$$-L_1 - \dots - L_{2k+1} > 0$$

であることから従う。

(2) V_1 の射影を type2+ で与えたとき、接点が発生しないようにするためには V_2 の射影は type2- で与えなければならない。なぜなら、 V_2 に V_1 と同符号の射影を与えたとき l_1 の始点と終点の符号が異なり、補題 2.5 より接点が発生するからである。以下同様に、 V_i の射影を、 V_{i-1} と異符号の type で与えていくと、 l_1 から l_{2k} までに $S(P)$ との接点が発生しないような葉層を与えることができる。しかし、 V_1 と V_{2k+1} の射影の type が同符号なので、辺 l_{2k+1} に接点が発生する。以上により、全ての頂点を type2 で射影すると Σ を囲む辺に必ず接点が発生することが分かる。 \square

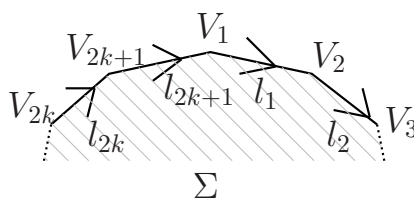


図 9 Σ を囲む頂点と辺

注意 2.7. 任意の branched surface P に対して、条件 (*) を満たす $(E_1, \dots, E_n) \in \mathbb{R}^n$ で、全て負であるようなものは存在しない。各辺には 3 つの面が隣接しているが、2 つの面では同符号で計算され、1 つの面では異符号で計算される。よって、各面から得られる不等式をすべて加えると、

$$E_1 + \dots + E_n > 0$$

が得られるためである。

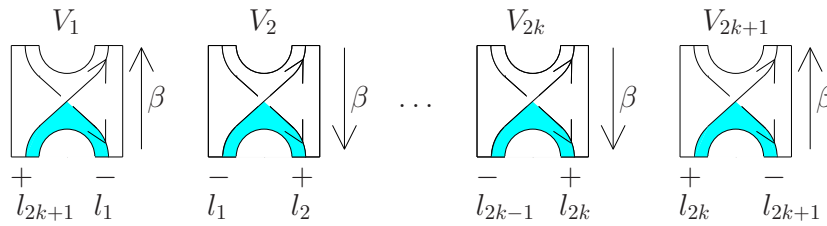


図 10 全ての頂点を type2 で与えたとき

定理 2.4 の証明. 全ての辺に横断的に交わる葉層 \mathcal{F} が存在したと仮定する. このとき補題 2.6 より, この葉層は少なくとも 1 つの頂点が type1 であるような射影で与えられる. 全ての頂点を type1 で与えるとき, すべての頂点は同符号の type で射影される必要がある. そうでなければ, P が standard であることから異なる符号の端点を結ぶ辺が必ず存在するのでその辺に接点が発生する. ここで, すべての頂点の射影を type1+ で与えることで \mathcal{F} が得られると仮定する. 葉層の接点が発生しないことから各辺に対応する実数はすべて正である必要があるが, これは補題 2.6 に矛盾する. 全ての頂点を type1- で与えるとき, 注意 2.7 に矛盾する.

type1 と type2 の頂点が同時に存在すると仮定する. このとき, 補題 2.6 (2) と同様の議論により, Σ を囲む辺に接点が発生しないためには V_1, \dots, V_{2m+1} のうち偶数個が type2, 奇数個が type1 である必要がある. このとき, type1+ の頂点と type1- の頂点の個数は一致しないので, 正の端点と負の端点の個数が一致しない. よって両端の符号が一致しない辺が存在するので矛盾が生じる. \square

以下では, flow-spine 上の S-stable 葉層を考える. flow-spine とは, 閉 3 次元多様体 \hat{M} に埋め込まれた円板の境界を \hat{M} の非特異フローに沿って自身と交わるまで流すことによって得られる多面体である. 詳細は [3] を参照. 定理 2.4 と同様の手法により以下が示される.

定理 2.8. (H.) P を閉 3 次元多様体の flow-spine とする. P のある面 Σ で, 全ての辺の向きが Σ から与えられる向きと反対であるようなものが存在するならば, P 上の S-stable 葉層ですべての辺に横断的に交わるものは存在しない.

定理 2.8 の判定条件を満たす Σ は任意の flow-spine に存在することが予想され, 反例は現在見つかっていない. つまり, 以下が予想される.

予想 2.9. 閉 3 次元多様体の flow-spine 上の S-stable 葉層で, 全ての辺に横断的に交わるものは存在しない.

3 S-stable 葉層の構成例

以下では、ポアンカレホモロジー球面の branched standard spine 上に実際に S-stable 葉層を構成する例を示す。

ポアンカレホモロジー球面とは、ホモロジー群が S^3 のホモロジー群と同型であり、かつ S^3 と同相でない 3次元多様体である。ポアンカレホモロジー球面の branched standard spine P_{12} は、正 12 面体の向かい合う面を $\frac{\pi}{10}$ ずつひねって貼り合わせることによって与えられる。また、 P_{12} は flow-spine である。 P_{12} の頂点は 5 つ、辺は 10 本、面は 6 つである。図 11 のように P_{12} の true vertex を V_1, \dots, V_5 , 辺を e_1, \dots, e_{10} , 面を D_1, \dots, D_6 とする。図 11 のような各面の向きづけが、 P_{12} 上の branch 構造を定めている。 $(E_1, \dots, E_{10}) \in \mathbb{R}^{10}$ が条件 (*) を満たすための必要十分条件は、各面から得られる次の連立不等式

$$\begin{cases} -E_1 - E_2 - E_3 - E_4 - E_5 > 0 \\ -E_6 + E_3 + E_{10} + E_7 + E_1 > 0 \\ -E_7 + E_4 + E_6 + E_8 + E_2 > 0 \\ -E_8 + E_5 + E_7 + E_9 + E_3 > 0 \\ -E_9 + E_1 + E_8 + E_{10} + E_4 > 0 \\ -E_{10} + E_2 + E_9 + E_6 + E_5 > 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

を満たすことである。

$(E_1, \dots, E_{10}) = (-1, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, 1, 1, 1, 1, 1)$ はこの連立不等式を満たす。よって、この値をもとに P_{12} 上の S-stable 葉層を構成できる。この値に対応する $\text{Nbd}(S(P_{12}); P_{12})$ における葉層は図 12 の左側のように与えられる。これを P_{12} 上全体に拡張したものを図 12 の右側に示す。さらに、 P_{12} は flow-spine であり、 D_1 に注目すると P 上の葉層は必ず接点をもつ。定理 2.4 または定理 2.8 より、ここで得られる葉層が最も接点数の小さいものであることが従う。

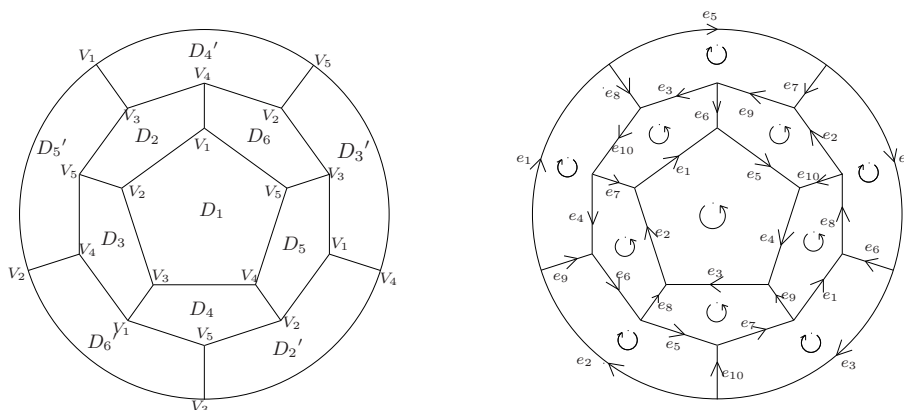


図 11 ポアンカレホモロジー球面の branched standard spine P_{12}

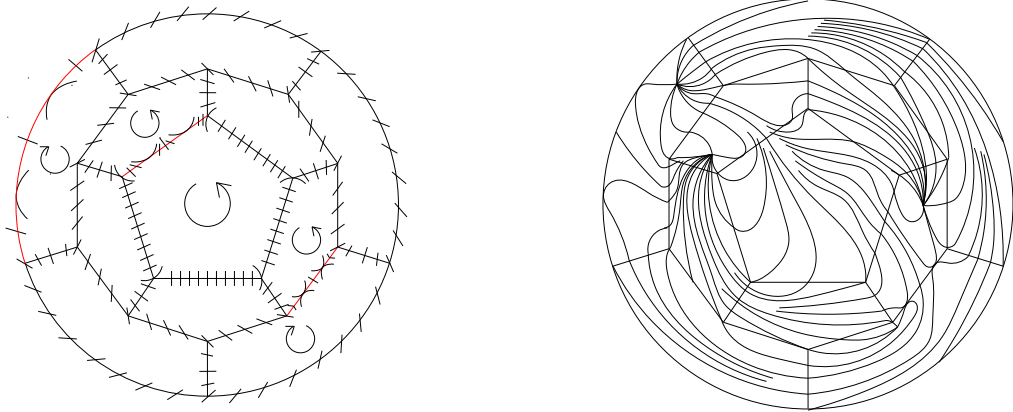


図 12 P_{12} 上に与えられる葉層

参考文献

- [1] R. Benedetti and C. Petronio, *Branched Spines and Contact Structures on 3-manifolds*, *Annali di Matematica pura ed applicata(IV)* **178** (2000), 81–102.
- [2] ———, *Branched Standard Spines of 3-manifolds*, *Lecture Notes in Math.*1653, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [3] I. Ishii, *Flow and Spines*, *Tokyo J. Math.* **9** (1986), 505–525.
- [4] W. P. Thurston and H. E. Winkelnkemper, *On the existence of contact forms*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **52** (1975), 345–347.