

# 種数0のLefschetzファイバー空間の符号数について

宮村 旭 (東京工業大学理学院)

## 1 はじめに

本稿では, Lefschetz fibration と呼ばれる構造を持った4次元多様体の, 符号数と呼ばれる不変量を考察する. また, 特に断らない限り, 本稿においては多様体はすべて可微分, コンパクト, 向き付けられているとする.

この節では符号数と Lefschetz fibration の定義を与える.

**定義 1.1.** (交叉形式)  $2n$ 次元多様体  $M$  の基本類を  $[M] \in H_{2n}(M, \partial M; \mathbb{Z})$  とする. このとき,

$$Q_M : H^n(M, \partial M; \mathbb{Z}) \times H^n(M, \partial M; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$Q_M(\alpha, \beta) = \langle \alpha \cup \beta, [M] \rangle$$

で定義される双線形形式  $Q_M$  を  $M$  の交叉形式と呼ぶ. 特に, Poincaré-Lefschetz 双対定理により  $Q_M$  は  $H_n(M; \mathbb{Z})$  上の双線形形式とも見なせる.

$M$  が4次元多様体であるとき,  $Q_M$  の重複度を込めた正, 負, 0の固有値の個数をそれぞれ,  $b_2^+(M), b_2^-(M), b_2^0(M)$  と表す.

**定義 1.2.** (符号数)  $Q_M$  の符号数  $b_2^+(M) - b_2^-(M)$  を  $\sigma(M)$  と書き, 多様体  $M$  の符号数と呼ぶ.

**注意 1.3.**  $b_2(M) = b_2^+(M) + b_2^-(M) + b_2^0(M)$  である.

次に Lefschetz fibration の定義を与える.  $M, B$  をそれぞれ4,2次元連結多様体とし,  $f : M \rightarrow B$  を滑らかな全射とする.

**定義 1.4.** (Lefschetz fibration)  $f$  が次の(1),(2)を満たすとき,  $f$  を **Lefschetz fibration** と呼ぶ.

(1)  $\{b_1, \dots, b_m\} \subset \text{Int}B$  を  $f$  の臨界値集合としたとき, 各  $b_i$  に対し  $f^{-1}(b_i)$  はただ一つの臨界点  $p_i$  を持つ,

(2) 各  $i$  に対し,  $b_i, p_i$  の,  $B, M$  の向きと両立する局所複素可微分座標近傍  $(U, w), (V, (z_1, z_2))$  が存在し,  $V$  上で  $f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$  となる.

**注意 1.5.** •  $b_0 \in B - \{b_1, \dots, b_m\}$  を取ると,  $f^{-1}(b_0)$  はコンパクト有向曲面となる. この  $f^{-1}(b_0)$  を Lefschetz fibration の一般ファイバー,  $f^{-1}(b_i)$  ( $1 \leq i \leq m$ ) を特異ファイバーと呼ぶ.

- $f$  を特異ファイバー達の補空間に制限したものは一般ファイバーをファイバーを持つファイバー束となる. この時の各臨界値周りのモノドロミーは, 消滅サイクルと呼ばれる一般ファイバー内の単純閉曲線に沿った Dehn ツイストになることが知られている.

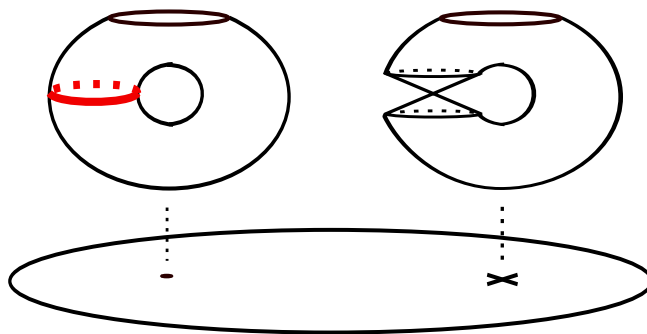


図 1.1: 左:一般ファイバー, 右:特異ファイバー, 赤線:消滅サイクル

## 2 主結果

本節で主結果とその証明の概略を説明する.  $\Sigma_g^r$  を種数  $g$ , 境界  $r$  のコンパクト有向曲面とする. 主結果は以下である.

**定理 2.1.**  $r$  を  $0$  以上の整数,  $f : Y \rightarrow D^2$  を,  $\Sigma_0^{r+1}$  を一般ファイバーとし, 消滅サイクルを  $\gamma_1, \dots, \gamma_m \subset \Sigma_0^{r+1}$  とするような *Lefschetz fibration* とする. このとき,

$$\sigma(Y) = -m + \dim \langle \gamma_1, \dots, \gamma_m \rangle$$

が成立する.

ただし,  $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_m \rangle$  は  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  が生成する  $H_1(\Sigma_0^{r+1}; \mathbb{R})$  の部分空間である.

また, Lefschetz fibration のハンドル分解を考察することにより, 次の系が導かれる.

**系 2.2.** 定理 2.1 と同じ状況において,  $\sigma(Y) = -m + r - b_1(Y)$  である.

証明のために次の定理を紹介しておく.

$X_-, X_0, X_+$  を 3 次元多様体,  $Y, Y_-, Y_+$  を 4 次元多様体,  $Z$  を 2 次元多様体とし, 以下を満たすとする (図 2.1).

$$Y = Y_- \cup Y_+, \quad Y_- \cap Y_+ = X_0, \quad \partial Y_{\pm} = X_{\pm} \cup X_0, \quad \partial X_{\pm} = \partial X_0 = Z.$$

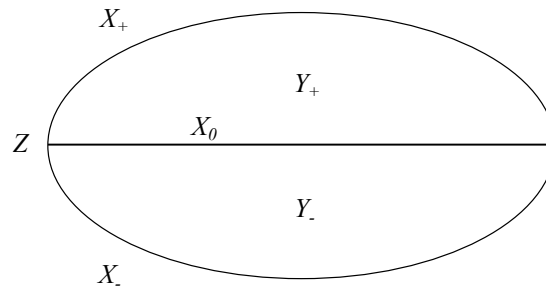


図 2.1: Wall's non-additivity

$Y$  の向きは  $Y_-$  と  $Y_+$  の向きに誘導される向きであり, その他については,  $\partial_*[Y_-] = [X_0] - [X_-]$ ,  $\partial_*[Y_+] = [X_+] - [X_0]$ ,  $\partial_*[X_0] = \partial_*[X_{\pm}] = [Z]$ , により向き付けられているとする. ただし,  $\partial_*$  はホモロジー完全系列における連結準同型である.  $i_t : Z \hookrightarrow X_t$  ( $t = -, +, 0$ ) とし,  $i_{t*}$  を  $i_t$  による  $\mathbb{R}$  係数ホモロジー群の間の誘導準同型とする.  $V = H_{2n-1}(Z; \mathbb{R})$  とおき,  $V$  の部分空間  $L_-, L_0, L_+$  とベクトル空間  $W$  を次のように定義する.

$$\begin{aligned} L_- &= \text{Ker}(i_{-*} : V \rightarrow H_{2n-1}(X_-; \mathbb{R})) \\ L_0 &= \text{Ker}(i_{0*} : V \rightarrow H_{2n-1}(X_0; \mathbb{R})) \\ L_+ &= \text{Ker}(i_{+*} : V \rightarrow H_{2n-1}(X_+; \mathbb{R})) \\ W &= \frac{L_- \cap (L_0 + L_+)}{(L_- \cap L_0) + (L_- \cap L_+)} \end{aligned}$$

$a, a' \in L_- \cap (L_0 + L_+)$  を取ったとき,  $a' + b' + c' = 0$  を満たす  $b' \in L_0, c' \in L_+$  が存在する. そこで,

$$\Psi' : L_- \cap (L_0 + L_+) \times L_- \cap (L_0 + L_+) \rightarrow \mathbb{R}$$

を,  $\Psi'(a, a') = Q_Z(a, b')$  となる双線形形式とすれば,  $\Psi'$  は  $W$  上で well-defined となり,  $W$  上に対称な双線形形式  $\Psi$  を誘導する.  $\Psi$  の符号数を  $\sigma(V; L_-, L_0, L_+)$  とするとき, 次の定理が成り立つ.

**定理 2.3.** (Wall[2])

$$\sigma(Y) = \sigma(Y_-) + \sigma(Y_+) - \sigma(V; L_-, L_0, L_+)$$

証明の概略. 定理 2.1:

$r$  を 0 以上の整数,  $f: Y_+ \rightarrow D^2$  を,  $\Sigma_0^{r+1}$  を一般ファイバーとし, 消滅サイクルを  $\gamma_1, \dots, \gamma_m \subset \Sigma_0^{r+1}$  とするような Lefschetz fibration とする.

$$Y_- = \left( \prod_{i=0}^r D_i^2 \right) \times D^2,$$

$$X_0 = \left( \prod_{i=0}^r \partial D_i^2 \right) \times D^2 = \partial Y_+ - \text{Int } f^{-1}(\partial D^2),$$

$$X_+ = f^{-1}(\partial D^2),$$

$X_- = \left( \prod_{i=0}^r D_i^2 \right) \times \partial D^2$  として定理 2.3 を適用させる (図 2.2). このとき,  $Y = Y_+ \cup Y_-$  は  $S^2 \times D^2 \# m \mathbb{C}P^2$  と微分同相になるので,  $\sigma(Y) = -m$  となる. さらに, 仮定からは次の 2 つの命題が導かれる.

命題 2.4.  $\Psi$  は正定値である.

命題 2.5.  $\dim W = \dim \langle \gamma_1, \dots, \gamma_m \rangle$  となる.

これらより,

$$-m = \sigma(Y) = \sigma(Y_+) - \sigma(V; L_-, L_0, L_+) = \sigma(Y_+) - \dim \langle \gamma_1, \dots, \gamma_m \rangle$$

となり, 主結果を得る.

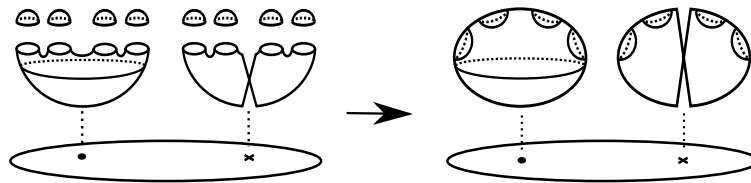


図 2.2

□

命題 2.4, 2.5 は次の補題から与えられる.

補題 2.6.  $W, \Psi$  は以下で与えられる

$$W = \left\langle \sum_{s=1}^m Q_Z(\gamma_s, l_1) \gamma_s, \dots, \sum_{s=1}^m Q_Z(\gamma_s, l_r) \gamma_s \right\rangle$$

$$\Psi \left( \sum_{s=1}^m Q_Z(\gamma_s, l_i) \gamma_s, \sum_{s=1}^m Q_Z(\gamma_s, l_j) \gamma_s \right) = \sum_{s=1}^m Q_Z(\gamma_s, l_i) Q_Z(\gamma_s, l_j)$$

ここで  $Z$  内のホモロジー類  $l_j$  は次の補題 2.7 に現れるものとする.

補題 2.7.  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  を  $\Sigma_0^{r+1}$  内の単純閉曲線,  $\phi = t_{\gamma_m} \circ \dots \circ t_{\gamma_1}, \Sigma_\phi = \Sigma_0^{r+1} \times [0, 1] / (x, 1) \sim (\phi(x), 0), Z = \partial \Sigma_\phi = \prod_{j=0}^r \partial D_j^2 \times \partial D^2, \partial_j (j = 0, \dots, r)$  を  $\partial \Sigma_0^{r+1}$  の各連結成分,  $p_j (j = 0, \dots, r)$  を  $\partial_j$  上の一点,  $i: Z \hookrightarrow \Sigma_\phi$  を包含写像, 各  $j$  に対し  $m_j, l_j \in H_1(Z)$  を  $m_j = [\partial_j \times \{0\}], l_j = [p_j \times \partial D^2]$  とする. ただし  $Q_Z(m_i, l_j) = \delta_{ij}$  となるようにとる. このとき,  $\gamma_s \in H_1(\Sigma_0^{r+1}) = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{R} m_i \subset \bigoplus_{i=0}^r \mathbb{R} m_i \oplus \mathbb{R} l_i = H_1(Z)$  であり,

$$i_*(l_j) = i_*(l_0) - \sum_{s=1}^m Q_Z(\gamma_s, l_j) i_*(\gamma_s)$$

となる. ただし,  $t_\gamma$  は  $\gamma$  に沿った Dehn ツイストである.

証明の概略. 命題 2.4&2.5: どちらも補題 2.6 から直接計算によって示される. □

補題 2.7 を認めて補題 2.6 を示す.

証明の概略. 補題 2.6: 補題 2.7 から

$$L_+ = \text{Ker } i_{+*} = \langle l_1 - l_0 + \sum_{s=1}^m Q_Z(\gamma_s, l_1)\gamma_s, \dots, l_r - l_0 + \sum_{s=1}^m Q_Z(\gamma_s, l_r)\gamma_s, \sum_{i=0}^r m_i \rangle$$

また,

$$L_- = \text{Ker}(i_{-*} : H_1(Z) \rightarrow H_1(X_-)) = \bigoplus_{i=0}^r \mathbb{R}m_i$$

$$L_0 = \text{Ker}(i_{0*} : H_1(Z) \rightarrow H_1(X_0)) = \bigoplus_{i=0}^r \mathbb{R}l_i$$

であることは, 設定から明らかなので,

$$W = \frac{L_- \cap (L_0 + L_+)}{(L_- \cap L_0) + (L_- \cap L_+)} = \langle \sum_{s=1}^m Q_Z(\gamma_s, l_1)\gamma_s, \dots, \sum_{s=1}^m Q_Z(\gamma_s, l_r)\gamma_s \rangle$$

となる. このことを用いて  $\Psi$  を直接計算することにより補題が示される. □

証明の概略. 補題 2.7:  $\sigma_j$  を  $p_0$  から  $p_j$  への道とする. 自然な射影  $\Sigma_0^{r+1} \times [0, 1] \rightarrow \Sigma_\phi$  の誘導するチェイン複体の間の準同型を考えることにより,  $i_*(l_j) = i_*(l_0) + [\phi_\#(\sigma_j) - \sigma_j]$  が示される.

$[\phi_\#(\sigma_j) - \sigma_j] = -\sum_{s=1}^m Q_Z(\gamma_s, l_j)i_*(\gamma_s)$  は  $m$  に関する帰納法で示される.  $\Sigma_0^{r+1}$  に図 2.3 のように 2 次元 1-ハンドル  $h^1$  を  $\partial\Sigma_0^{r+1}$  の 0,  $j$  番目の連結成分に貼り付ける.  $h^1$  のコアを表す特異 1 チェイン  $\sigma'_j$  や  $\Sigma_0^{r+1}$  の特異チェインは包含写像によって  $\Sigma'$  の特異チェインとみなせることに注意すると,  $H_1(\Sigma') = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{R}m_i \oplus \mathbb{R}[\sigma_j - \sigma'_j]$  とかけることがわかる.

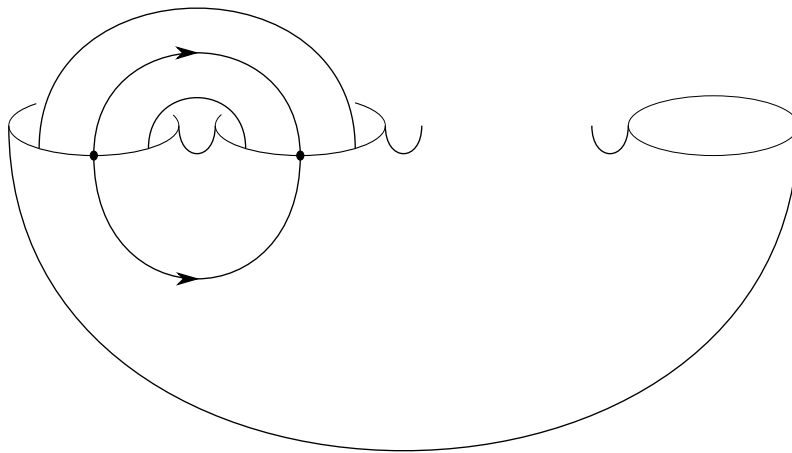


図 2.3:  $\Sigma' = \Sigma \cup h^1$

$\gamma \subset \Sigma_0^{r+1}$  を単純閉曲線としたとき, そのホモロジー類  $\sum_{i=1}^r a_i m_i$  は,  $\bigoplus_{i=1}^r \mathbb{R}m_i \subset \bigoplus_{i=0}^r \mathbb{R}m_i \oplus \mathbb{R}l_i = H_1(Z)$  から  $Z$  のホモロジー類とみなせる. したがって,  $Q_Z(\gamma, l_j) = \sum_{i=1}^r a_i Q_Z(m_i, l_j) = a_j$  が意味を持つ.

また,  $\Sigma'$  の向きを  $\Sigma$  から誘導される向きとすれば,  $Q_{\Sigma'}$  は  $x, y \in \{m_1, \dots, m_r, [\sigma_j - \sigma'_j]\}$  に対して,

$$Q_{\Sigma'}(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) = ([\sigma_j - \sigma'_j], m_j) \\ 0 & (\{x, y\} \neq \{m_j, [\sigma_j - \sigma'_j]\}) \end{cases} \quad (2.1)$$

を満たす.

Picard-Lefschetz の公式を用いることにより, 任意の単純閉曲線  $\gamma \subset \Sigma_0^{r+1} (\subset \Sigma')$  に対して,

$$t_{\gamma^*}([\sigma_j - \sigma'_j]) = [\sigma_j - \sigma'_j] + Q_{\Sigma'}(\gamma, [\sigma_j - \sigma'_j])\gamma.$$

このことと,  $t_{\gamma\#}(\sigma'_j) = \sigma'_j$  により

$$[t_{\gamma\#}(\sigma_j) - \sigma_j] = Q_{\Sigma'}(\gamma, [\sigma_j - \sigma'_j]) = -a_j\gamma = -Q_Z(\gamma, l_j)\gamma,$$

となり  $m = 1$  の時が示される.

$\gamma_1, \dots, \gamma_k \subset \Sigma_0^{r+1}$  を  $k$  個の単純閉曲線とするとき,

$$[(t_{\gamma_k} \circ \dots \circ t_{\gamma_1})\#(\sigma_j) - \sigma_j] = -\sum_{s=1}^k Q_Z(\gamma_s, l_j)\gamma_s \quad (2.2)$$

であるとする.

$\gamma \subset \Sigma_0^{r+1}$  を単純閉曲線とする.  $\psi = t_{\gamma_k} \circ \dots \circ t_{\gamma_1}$  とおく. 各  $\gamma_i$  と  $\gamma$  は  $\Sigma_0^{r+1}$  内の曲線なので  $\psi\#(\sigma_j - \sigma'_j) = \psi\#(\sigma_j) - \sigma'_j$ ,  $t_{\gamma\#}(\psi\#(\sigma_j) - \sigma'_j) = t_{\gamma\#}(\psi\#(\sigma_j)) - \sigma'_j$  となる. よって, Picard-Lefschetz の公式から

$$[t_{\gamma\#}(\psi\#(\sigma_j)) - \sigma'_j] = [\psi\#(\sigma_j) - \sigma'_j] + Q_{\Sigma'}(\gamma, [\psi\#(\sigma_j) - \sigma'_j])\gamma$$

となる. ここで,  $[\psi\#(\sigma_j - \sigma'_j)]$  に, Picard-Lefschetz の公式を繰り返し適用させることで,

$$[\psi\#(\sigma_j) - \sigma'_j] = [\psi\#(\sigma_j - \sigma'_j)] = [\sigma_j - \sigma'_j] + \alpha \quad (\alpha \in H_1(\Sigma'))$$

と書けるので,  $Q_{\Sigma'}(\gamma, [\sigma_j - \sigma'_j]) = -Q_Z(\gamma, l_j)$  に注意すれば,

$$[t_{\gamma\#}(\psi\#(\sigma_j)) - \sigma'_j] = [\sigma_j - \sigma'_j] + \alpha - Q_Z(\gamma, l_j)\gamma + Q_{\Sigma'}(\gamma, \alpha)\gamma$$

従って,

$$[t_{\gamma\#}(\psi\#(\sigma_j)) - \sigma_j] = \alpha - Q_Z(\gamma, l_j)\gamma + Q_{\Sigma'}(\gamma, \alpha)\gamma \quad (2.3)$$

また,  $[\psi\#(\sigma_j) - \sigma'_j] = [\sigma_j - \sigma'_j] + \alpha$  と仮定 (2.2) より

$\alpha = -\sum_{s=1}^k Q_Z(\gamma_s, l_j)\gamma_s$  となる. さらに,  $\gamma, \gamma_s \in H_1(\Sigma_0^{r+1})$  から  $Q_{\Sigma'}(\gamma, \gamma_s) = 0$  となるので  $Q_{\Sigma'}(\gamma, \alpha) = 0$ . このことと, (2.3) に  $\alpha$  を代入することにより証明が完了する.  $\square$

### 3 先行研究との関連

今回の主結果は次の定理と関連がある.

**定理 3.1.** (Etnyre[1])  $X$  を種数 0 のオープンブック分解と両立する接触多様体  $M$  の symplectic 充填とすると,  $b_2^+(X) = b_2^0(X) = 0$  となる.

この定理は次の二つの定理と主結果を用いて示すことができる.

定理 3.2. (Niederkrüger-Wendl[3]) 種数  $0$  のオープンブック分解に対応する接触多様体のシンプレクティック充填は Stein 充填のブローアップにより得られる.

定理 3.3. (Wendl[4]) 種数  $0$  のオープンブック分解に対応する接触多様体の Stein 充填はオープンブック分解と両立する Lefschetz fibration の構造を持つ.

$M'$  を定理 3.1 におけるシンプレクティック充填とすると, 定理 3.2 により,  $0$  以上の整数  $k$  と Stein 充填  $M$  があって  $M' = M \# k\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$  と書ける. このとき,  $M$  が負定値ならば  $M'$  も負定値となることに注意する. 一方で定理 3.3 から  $M$  は種数  $0$  の Lefschetz fibration の構造を持つ. よって消滅サイクルの個数を  $m$ , 一般ファイバーの境界成分の個数を  $r+1$  ( $r$  は  $0$  以上の整数) とすると, 系 2.2 から  $b_2^+ - b_2^- = \sigma(M) = -m + r - b_1$  となる. さらに Lefschetz fibration のハンドル分解から,  $1 - b_1 + b_2^+ + b_2^0 + b_2^- = \chi(M) = 1 - r + m$  が得られるので, これらを組み合わせることで  $M$  が負定値と分かる.

## 参考文献

- [1] J. Etnyre, *Planar open book decompositions and contact structures*, Pacific J. Math. **202** (2002), 99-108
- [2] C. T. C. Wall, *Inventiones math.* **7**, 267-274(1969)
- [3] K. Niederkrüger and C. Wendl, *Weak symplectic fillings and holomorphic curves*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **44** (2011), 801-853
- [4] C. Wendl, *Strongly fillable contact manifolds and J-holomorphic foliations*, Duke Math. J. **151** (2010), 337-384