Milnor-Orr invariants from the Kontsevich invariant

野坂 武史 [1] (東京工業大学 理学院 数学系)

概 要

主定理は, Milnor と Orr と Kontsevich らの不変量が (ある制限内で) 等価である事である. 本稿はその３つの不変量を説明し、どのように等価である事を述べる.

1　動機; ミルナー不変量のおさらい

論文 [Mi1, Mi2] で Milnor は $\bar{\mu}$-不変量を定義した, それは絡み目の緯線を中心拡大で見るもので, 計量的なものであった. その $\bar{\mu}$-不変量は位相的な研究法が幾つかあり ([IO, CDM, MY] など参照), 昨年度は筆者と小谷氏 [KN] が強力な計算法を与えた.

さらに $\bar{\mu}$ 不変量のホモトピカルな拡張として, Orr [O] は "based links" の不変量を定義している. その不変量は冪零的なスライスの完全障碍であることが知られている [O, IO]. とはいえ, 彼の不変量はホモトピー群に値を持つため, 不変量の計算例が少なかった. また $\bar{\mu}$-不変量の真の拡張になっているか答えがなかった.

他方で, 量子トポロジーにおいて, べき零的な研究手法とは, Kontsevich 不変量や LMO 関手の tree 部分を入念に考察する事である ([HM, GL, Ma2] など参照). 例えば, $\bar{\mu}$-不変量の非自明初項は Kontsevich 不変量のある tree 部分と一致する事が知られる [HM]. また写像類群に関しては Johnson-Morita 準同型と LMO 関手の冪零的な研究と関連する ([Ma1, Ma2] 参照). という事もあり, ツリーの観察は時に３次元の基本類やマッセイ積との関連も与えている [GL].

本研究では,(Milnor-)Orr 不変量が Kontsevich 不変量から還元されることを見る (但し Masseyau[Ma1, Ma2] に大きく影響され, 氏の結果の string 絡み目版とも言える). それを記述のため注記したい事に, 両不変量が然るべく次数がある上, $k \in \mathbb{N}$ に対し, 次数 k の Orr 不変量とは $\bar{\mu}$-不変量が次数 $\leq k$ で 0 となる "based link" L にしか定義されない. すると, まず第一の定理は以下となる.

定理 1.1 (系 3.3)**.** *$\bar{\mu}$-不変量が次数 $\leq k$ で 0 となる based link L に対し, L の Orr 不変量は Kontsevich 不変量の次数 $< 2k$ のツリーパートと等価である.*

帰結として２点を強調したい. この定理は上記の [HM] の一般化である点と, さらにその次数 $< 2k$ のツリーパートに位相的意味を与えた点である. これらは「量子不変量の位相的意味」という問題に, (少しではあるが) 進歩を与えたと思う. さらに, 「どの有限型不変量が Orr 不変量を還元するか？」という問に呼応し, HOMFLYPT 多項式で Orr 不変量が還元されることも示した (但し, この還元は Meilhan-Yasuhara[MY] の結果を簡単に言い換えであるが‥）.

さらに, 次数 k の Orr 不変量と, 次数 $< 2k$ の $\bar{\mu}$-不変量が等価である事を見る (定理 2.2). 従って, Orr 不変量はホモトピー群に値をもつものだったが, 結局は緯線の情報に過ぎない事になった (但し [Ma2, IO, Ko] などで指摘されてたが明確な記述はなかった (と思われる)) 以上の結果を要約すると以下の図になる.

[1] 本研究は, JSPS 科研費 (課題番号:25800049) からの助成を受けたものである. E-mail address: nosaka@math.teitech.ac.jp

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Orr invariant}\\ \text{of degree } k\end{array}} \overset{\text{Theorem 3.3}}{=\!=\!=\!=} \boxed{\begin{array}{c}\text{Tree-reduced Kontsevich}\\ \text{invariant of degree} < 2k\end{array}} \underset{\xrightarrow[\text{HOMFLYPT [MY]}]{\text{Recover via}}}{\overset{\text{Theorem 2.2}}{=\!=\!=\!=}} \boxed{\begin{array}{c}\text{Milnor } \mu\text{-invariant}\\ \text{of degree} < 2k\end{array}}$$

なお先行結果との比較を言及しておく. この図式の対応は写像類群の場合に, Massuyeau 氏にすでに示されている. その対応を図で表示しておこう.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{次数 } k \text{ の}\\ \text{森田準同型}\end{array}} =\!=\!=\!= \boxed{\begin{array}{c}\text{LMO 関手の次数 } 2k\\ \text{未満のツリーパート}\end{array}} =\!=\!=\!= \boxed{\begin{array}{c}\text{全ジョンソン準同型}\\ \text{の次数} < 2k \text{ 部分}\end{array}}$$

この様な対応があるため, String 絡み目や写像類群に制限しなくとも, もっと一般的 (Homology cylinder 等) に同様の等価性が期待できると思われる.

2 Milnor-Orr 不変量に関する定理

本節の前半では Milnor-Orr 不変量を復習し, 後半では定理 2.2 を述べる.

2.1 Milnor-Orr 不変量の復習

まず string 絡み目を復習する (むしろ図 1 の説明である). I を閉区間 $[0,1]$ とし, $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定する. そこで **(q-成分) string 絡み目**とは, 向付きアーク $A_1, \ldots, A_q$ から立方体 I^3 への滑らかな埋込みで, 境界条件 $A_i = \{p_i, q_i\}$ を満たすものである, ここで $p_i = (j/2q, 0, 0)$ と $q_i = (j/2q, 0, 1) \in I^3$ とした. また $SL(q)$ を q-成分 string 絡み目の集合全体とする. さらに string 絡み目がふたつ T と T' 与えられた時, **合成** $T \cdot T' \subset [0,1]^2 \times [0,2] \cong I^3$ が, T の q_i と T' の p'_i とを繋げることとで定義される. もし $T = \{A_i\}$ が string 絡み目の時, S^3 内の絡み目 $L = \{L_1, \ldots, L_q\}$ が $L_i = A_i \cup a_i$ によって定義される, ここで a_i は $S^3 \setminus L$ 内で p_i と q_i とをつなぐアークである. この絡み目は T **の閉包**と呼ばれ, $\overline{T}$ と書かれる; 図 1 参照.

次に, 本稿での群を確定しておこう. まず群 G に対し, 中心降下列 $\Gamma_k G$ を, 交換子群を用いて,

$$\Gamma_1 G := G, \qquad \Gamma_2 G := [G, G], \qquad \Gamma_3 G := [[G,G],G], \ldots, \Gamma_m G := [\Gamma_{m-1} G, G]$$

という風に, 帰納的に定義する. また F を階数 q の自由群とし, $x_1, \ldots, x_q$ を生成元とする. すると ($G = F$ として) 次の中心拡大を得る：

$$0 \longrightarrow \Gamma_{m-1}F/\Gamma_m F \longrightarrow F/\Gamma_m F \xrightarrow{p_{m-1}} F/\Gamma_{m-1}F \longrightarrow 0 \qquad \text{(central extension).} \quad (1)$$

このアーベル核は, 有限生成自由アーベル群で, その基底 (Hall basis) も解っている.

次に, 閉包 $\bar{T} \subset S^3$ に対して, $m \in \mathbb{N}$ に対して, 次の仮定を定義する:

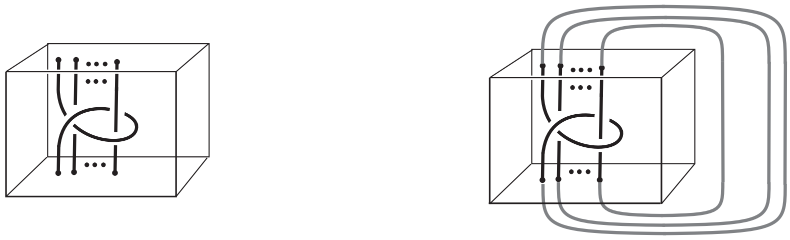

図 1: string 絡み目と, S^3 内での閉包の模式図.

- **仮定** $\mathcal{A}_m$. $^\forall k \le m$ に対し, 準同形 $f_k : \pi_1(S^3 \setminus \bar{T}) \to F/\Gamma_k F$ があり可換図式を満たす：

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus \bar{T}) \arrow[d, "\text{アーベル化}"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[drr, "f_4"] \arrow[drrrr, "f_m"] & & & & \\
F/\Gamma_2 F & F/\Gamma_3 F \arrow[l, "p_2"] & F/\Gamma_4 F \arrow[l, "p_3"] & \cdots\cdots \arrow[l] & F/\Gamma_m F. \arrow[l, "p_{m-1}"]
\end{tikzcd}$$

次に, Orr 不変量 [O] について復習する. 但し, T は仮定 $\mathfrak{A}_{k+1}$ を満たすとする (次数に注意). また ℓ 番目経線 $\mathfrak{m}_\ell$ を, 閉包を取った時の arc a_i を一周するループとする. これを $\pi_1(S^3 \setminus \bar{T})$ の元と思ったとき, x_ℓ と書こう. すると群準同型 $F \to \pi_1(S^3 \setminus \bar{T})$ を得る. 加えて, 群準同型 $f : G \to H$ に対して, Eilenberg-MacLane 空間での誘導射を $f_* : K(G,1) \to K(H,1)$ と書こう. そして位相空間 K_k を写像錐

$$K_k := \mathrm{Cone}\big((f_k \circ \tau)_* : K(F,1) \to K(F/F_k, 1)\big)$$

として定義する. すると仮定 $f_k(\mathfrak{l}_\ell) = 0$ ($^\forall k \le q$) だったので, f_k は連続写像

$$\rho_L : S^3 \to K_k$$

にまで伸びる. なので homotopy 3-class を考えるのは自然だろう：

$$\theta_k(L, \tau) := [\rho_L] \in \pi_3(K_k), \tag{2}$$

これを **Orr 不変量**という.

この器である $\pi_3(K_k)$ についてはよくわかっている. そこで既知の結果を羅列しておこう：

定理 2.1 ([O, IO]). *(I)* $N_h \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ を $H_2(F/F_h; \mathbb{Z}) = F_h/F_{h+1}$ の階数とする. この時 $\pi_3(K_k)$ と $H_3(K_k)$ に関して, 次の同型が誘導される:

$$\pi_3(K_k) \cong \bigoplus_{h=k}^{2k-1} \mathbb{Z}^{qN_h - N_{h+1}}, \qquad H_3(K_k; \mathbb{Z}) \cong H_3(K(F/F_k, 1); \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{h=k}^{2k-2} \mathbb{Z}^{qN_h - N_{h+1}}.$$

さらに, *Hurewicz* 準同型 $\mathfrak{H} : \pi_3(K_k) \to H_3(K_k; \mathbb{Z})$ は右辺の直和因子の中での射影に等しい事が知られている.

(II) また $\theta_k(L, \tau)$ の最低次数因子は次数 k の *Milnor* 不変量と一致する; (詳細は *[O]* または *[IO, §10]* を参照の事).

(III) 任意の元 $\kappa \in \pi_3(K_k)$ に対し, *based link* L と準同型 $g_k : \pi_1(S^3 \setminus L) \to F/F_k$ があって $\theta_k(L, \tau) = \kappa$ を満たす.

(IV) *Orr* 不変量が *"band connected sums"* に対し加法性を満たす; *[O, §3]* を参照.

(V) (関手性) $\iota_k : K_{k+1} \to K_k$ を射影 $F/F_{k+1} \to F/F_k$ が誘導する連続写像とする. すると L が $\mathfrak{A}_{k+1}$ を満たしたとき, $\mathrm{Im}(\iota_k)_* \cap \pi_3(K_{k+1})$ の中の次の等式を満たす: $(\iota_k)_*\big(\theta_k(L, \tau)\big) = \theta_{k+1}(L, \tau)$.

次に, Hurewicz 写像 $\mathfrak{H} : \pi_3(K_k) \to H_3(K_k; \mathbb{Z})$ による Orr 不変量 $\theta_k(L)$ のホモロジー還元について述べる. まず気づく事に, 入射 $K(F/F_k, 1) \to K_k$ が誘導する同型

$$P^{\mathrm{gr}} : H_3(K(F/F_k, 1), \sqcup^q K(\mathbb{Z}, 1); \mathbb{Z}) \cong H_3(K_k; \mathbb{Z})$$

に気づこう（ここで左辺は相対ホモロジーである）. まとめると, 値 $\mathfrak{H}(\theta_k(L))$ は $\theta_k(L)$ からトップの直和因子 $\mathbb{Z}^{qN_{2k-1}-N_{2k}}$ を削ったものである. さらに, 定義より, この $\mathfrak{H}(\theta_k(L))$ は基本類 $[S^3 \setminus L, \partial(S^3 \setminus L)] \in H_3(S^3 \setminus L, \partial(S^3 \setminus L); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ を押し出したものといえる. 即ち

$$P^{\mathrm{gr}} \circ (f_k)_*[S^3 \setminus L, \partial(S^3 \setminus L)] = \mathfrak{H}(\theta_k(L, \tau)) \in H_3(K_k; \mathbb{Z}). \tag{3}$$

2.2　定理；ミルナー不変量との関連

定理を述べる為, string 絡み目の Milnor μ-不変量を復習する ([HM, Ko, L1] 参照). String 絡み目 $T \in SL(q)$ に対し, $y_j \in \pi_1([0,1]^3 \setminus T)$ を $\{(j/2q, 0, 1)\}$ を一周するループとする; すると, [Mi2, L1] で示されることに, x_i を y_i に写す準同型 $F \to \pi_1([0,1]^3 \setminus T)$ を, m 次べき零に落とすと同型を誘導する:

$$\phi_* : F/F_m \cong \pi_1([0,1]^3 \setminus T)/\pi_1([0,1]^3 \setminus T)_m, \quad \text{for any } m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

ここで注意したい事に, T がもし pure braid の時, この ϕ_* は恒等射である. さらに, T の ℓ-番目成分の framing (つまり成分に沿ったカーブ) は元, $\lambda_\ell \in \pi_1([0,1]^3 \setminus T)$. この λ_ℓ は **T の ℓ-番目の緯線**という. この m 次べき零への商 $\phi_*^{-1}(\lambda_\ell) \in F/F_m$ は **T の m 次 μ-不変量** T という. 我々が気づきたい事に, 閉包 $\overline{T}$ が仮定 $\mathfrak{A}_{k+1}$ を満たす必要十分条件は, λ_j が F_k に入り, $\lambda_j = f_{k+1}(\mathfrak{l}_j) \in F_k/F_{k+1}$ modulo F_{k+1} となる事である.

Levine の論文 [L1] では, その様な string 絡み目 T に対し, μ-不変量 λ_j を modulo F_{2k} で考えている. ここで F_k/F_{2k} がアーベルな事に気づこう ($\because$ $[F_k, F_k] \subset F_{2k}$). さらに, [L1, 命題] では次の等式が常に成立する事が知られている.

$$[x_1, \lambda_1][x_2, \lambda_2] \cdots [x_q, \lambda_q] = 1 \in \pi_1([0,1]^3 \setminus T) \tag{4}$$

なので, $m \leq 2k$ に対して, modulo F_m で考えた和

$$\sum_{j=1}^{q} (x_j \otimes \lambda_j) \in \mathbb{Z}^q \otimes_{\mathbb{Z}} F_k/F_m$$

は次の交換子の Kernel に入っていることが解る.

$$[\bullet, \bullet]_{k,m} : F/F_2 \otimes F_k/F_m \longrightarrow F_k/F_{m+1}; \quad x \otimes y \longmapsto xyx^{-1}y^{-1}.$$

すると筆者は Milnor と Orr 不変量が一致する事が示せた.

定理 2.2. *(I)* $\mathbb{Q}$-ベクトル同型写像

$$\Phi \circ \eta^{-1} : \mathbb{Q} \otimes \mathrm{Ker}([\bullet, \bullet]_{k,2k-2}) \xrightarrow{\sim} H_3(F/F_k; \mathbb{Q}),$$

があって, それは閉包 $\overline{T}$ *が仮定* $\mathfrak{A}_{k+1}$ *を満たすストリング絡み目* T *に対して次の等式を満たす.*

$$\Phi \circ \eta^{-1}\big((x_1 \otimes \lambda_1) + \cdots + (x_q \otimes \lambda_q)\big) = \mathfrak{H} \circ \theta_k(\overline{T}, \tau).$$

(II) さらに, ホモトピー群 $\pi_3(K_k)$ *に関して, 全単射写像*

$$\overline{\Phi} : \mathbb{Q} \otimes \mathrm{Ker}([\bullet, \bullet]_{k,2k-1}) \xrightarrow{\sim} \pi_3(K_k) \otimes \mathbb{Q},$$

が $\Phi \circ \eta^{-1}$ *の拡張としてあって, 同じ等式* $\overline{\Phi}\big((x_1 \otimes \lambda_1) + \cdots + (x_q \otimes \lambda_q)\big) = \theta_k(\overline{T}, \tau)$ *が閉包* $\overline{T}$ *が仮定* $\mathfrak{A}_{k+1}$ *を満たすストリング絡み目* T *に対して成立する.*

(II) が同型であることが予想である.

とはいえ, 定理2.1 (III) から次の結果を得た ([L1, Proposition 5] の一般化である):

系 2.3. 元 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) \in F_k/F_{2k}$ が等式 $[x_1, \alpha_1] \cdots [x_q, \alpha_q] = 1 \in F/F_{2k}$ 満たすものとする. この時, *string* 絡み目で $\bar{\mu}$-不変量 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_q) \in (F_k)^q$ が $\lambda_j \equiv \alpha_j \ mod \ F_k/F_{2k}$ と一致するものがある.

3 Kontsevich 不変量のツリーパート

節 1 で述べたように, $\bar{\mu}$-不変量と Kontsevich 不変量との関係を述べよう.

3.1 復習：string 絡み目のツリー版 Kontsevich 不変量

まず $\mathbb{Q}$-ベクトル空間 $\mathcal{A}(\uparrow^q)$ を復習しよう. まず q-成分の *chord* 図とは $(\sqcup_{j=1}^q [0,1]) \cup \Gamma$ で, 次の 3 条件を満たすものである:

1. Γ は 1-, 3-価頂点グラフで, その 1-価頂点は $(\sqcup_{j=1}^q [0,1])$ の内部に含まれ,
2. Γ は 1-価頂点を含むとし,
3. 各 3-価頂点は向付けられる.

その Γ の成分はダッシュ線で書かれる. すると, $\mathcal{A}^t(\uparrow^q)$ は, 全ての chord 図で生成される空間 $\mathbb{Q}$-空間を STU, AS, IHX 関係式で割った商とする. ここでこの三つの関係式は図 2 にある局所図である. グラフの次数を, Γ の頂点数の半分と定義すると, 空間 $\mathcal{A}(\uparrow^q)$ は次数付き空間になる. また $\mathcal{A}(\uparrow^q)$ の次数 n 部分空間を $\mathcal{A}_n(\uparrow^q)$ と書こう. 記述の乱用だが, $\mathcal{A}(\uparrow^q)$ の完備化したものとしておく. そして, $\mathcal{A}^t(\uparrow^q) \subset \mathcal{A}(\uparrow^q)$ をコード図の各連結成分がツリーになっている部分空間とする. さらに, $(\sqcup_{j=1}^q [0,1])$ と $(\sqcup_{j=1}^q [0,1])$ との自然な合成により, $\mathcal{A}(\uparrow^q)$ は環構造を持つ. さらに, 可換な余積 $\Delta : \mathcal{A}(\uparrow^q) \to \mathcal{A}(\uparrow^q)^{\otimes 2}$ 構造があり ([CDM, Chapter 4] など参照), $\mathcal{A}(\uparrow^q)$ は Hopf 代数構造を持つ.

String 絡み目の Kontsevich 不変量とは, $\mathcal{A}(\uparrow^q)$ に値を持つ不変量であり, 多くの性質がある事が知られている [2]. 但し, 定義が長いため, 今回必要な性質のみ述べておく.

(I) 不変量 $Z(T)$ は $\mathcal{A}(\uparrow^q)$ の元である.

(II) $Z(T)$ は乗法的である, 即ち, $Z(T_1)Z(T_2) = Z(T_1 \cdot T_2)$ が二つの string 絡み目 T_1, T_2 に成立つ.

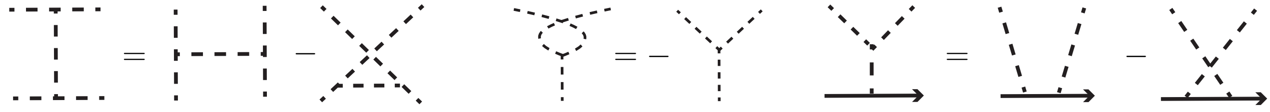

図 2: Chord 図の IHX, AS, STU 関係式の模式図.

[2] 専門家向けの注意：正しくは q-タングルの Kontsevich 不変量で定義している. ここで単射 { String 絡み目 } → { q-タングル } を固定したので, String 絡み目の不変量と思っている. 但し, この単射の選び方により, Kontsevich 不変量が Drinfeld 接合子の分のズレが生じるが, しかし主定理には影響しない.

(III) 全ての $Z(T)$ は $\mathcal{A}(\uparrow^q)$ で group-like である, 即ち, $\Delta(Z(T)) = Z(T) \otimes Z(T)$.

ここで部分空間 $\mathcal{A}^t(\uparrow^q)$ を思い起こし, 射影 $p^t : \mathcal{A}(q) \to \mathcal{A}^t(\uparrow^q)$ を取る. $Z^t_{<m}(T)$ を合成 $p^t \circ Z(T)$ を $O(m)$ でとったものである. 言い替えると, この $Z^t_{<m}(T)$ は Kontsevich 不変量 $Z_{<m}(T)$ からツリーパートと次数 m 未満を取ったものである.

さらに, 原始的元について言及する. ここで, $x \in \mathcal{A}(\uparrow^q)$ が**原始的**であるとは, $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$ を満たす時を言う. $\mathcal{A}^t(\uparrow^q)$ の原始的元の成す部分空間を $\mathcal{P}^t(\uparrow^q)$ と書こう. さらに, $\mathcal{P}^t_{<n}(\uparrow^q)$ はその次数 $< n$ となる部分空間とする. 知られていることに, $\mathcal{P}^t(q)$ は単連結な chord 図で生成される $\mathcal{A}^t(\uparrow^q)$ の部分空間である.

3.2 定理

定理を述べるために, 次の補題を用意する. この補題は簡単だが, 本稿での次数の制限について本質的である.

補題 3.1. *(1)* $k \in \mathbb{Z}$ *に対し, 任意の元* $a, b \in \oplus_{h=k}^{2k-1} \mathcal{A}_h(\uparrow^q)$ *は* $(1+a) \cdot (1+b) \equiv 1 + a + b + O(2k) \in \mathcal{A}(\uparrow^q)$ *を満たす.*
(2) $a \in \mathcal{A}(\uparrow^q)$ *が* $a = 1 + O(k)$ *と* $\Delta(a) = a \otimes a$ *を満たしたとする. もし* $a = 1 + b + c$ *で* $c \in \mathcal{A}_{<2k}(\uparrow^q)$ *と分解したとき,* b *は原始的である.*

[HM] で知られる事に, もし string 絡み目 T が仮定 $\mathfrak{A}_{k+1}$ を満たすとき, $Z^t(T) = 1 + O(k-1)$ である; よって, 性質 (III) と補題 3.1(2) から $Z^t(T)_{<2k} - 1 \in \mathcal{P}^t_{<2k}(q)$ である. すると定理は次のようになる.

定理 3.2. *或る線形同型* $R : \oplus_{j=k}^{2k-1} \mathcal{P}_j(q) \to \mathrm{Ker}([\bullet, \bullet]_{k,2k-1} \otimes \mathbb{Q})$ *があって,* $\mathfrak{A}_{k+1}$ *を満たす* T *に対して, 次の等式を満たす:*

$$R(Z^t_{<2k}(T)) = x_1 \otimes \lambda_1 + \cdots + x_q \otimes \lambda_q. \tag{5}$$

この定理は, [HM] の主定理 6.1 の一般化である. つまり, 等式 (5) を次数 k で制限すると, 既知の結果である (事らしい [HM, 10 章] 参照).

この結果として, 定理 2.2 はこの左辺が Orr 不変量と一致すると言っているので, 我々は次の等価性を得た:

系 3.3. *もし string 絡み目* T *が* $\mathfrak{A}_{k+1}$ *を満たしたとすると, Orr 不変量* $\theta_k(T)$ *はその次数* $< 2k$ *なる Kontsevich 不変量のツリーパートに等価である.*

以上で主定理の陳述を終える. ただし, 証明は少々長いので, ご関心のある方は, 論文をご高覧下さい.

参考文献

[CDM] S. Chmutov, S. Duzhin and J. Mostovoy, *Introduction to Vassiliev Knot Invariants*, Cambridge University Press (2012).

[GL] S. Garoufalidis, J. P. Levine, *Tree-level invariants of three-manifolds, Massey products and the Johnson homomorphism* , from: "Graphs and patterns in mathematics and theoretical physics", Proc. Sympos. Pure Math. 73, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2005) 173–203

[HM] N. Habegger, G. Masbaum, *The Kontsevich integral and Milnor's invariants.* Topology **39** (2000) 1253-1289.

[IO] K. Igusa, K. Orr, *Links, pictures and the homology of nilpotent groups*, Topology **40** (2001), 1125–1166.

[Ka] N. Kawazumi, *Cohomological aspect of Magnus expansions*, preprint, arXiv: math.GT/0505497

[Ko] H. Kodani, *Group-like expansions and invariants of string links*, preprint, arxiv.1604.03213

[KN] H. Kodani, T. Nosaka, *Milnor invariants via unipotent Magnus embeddings*, http://arxiv.org/abs/1709.07335

[L1] J.P. Levine, *The $\bar{\mu}$-invariants of based links*, Differential topology (Siegen, 1987), 87–103,

[L2] J.P. Levine, Addendum and correction to: *Homology cylinders: an enlargement of the mapping class group.* Algebr. Geom. Topol., 2: 1197–1204 (electronic), 2002.

[Ma1] G. Massuyeau, *Infinitesimal Morita homomorphisms and the tree-level of the LMO invariant*, Bull. Soc. Math. France **140**:1 (2012) 101–161.

[Ma2] ———, *Formal descriptions of Turaev's loop operations*, arXiv:1511.03974.

[MY] J.B. Meilhan, A. Yasuhara, *Milnor invariants and the HOMFLYPT polynomial*, Geom. Topol **16** (2012), 889–917.

[Mi1] J. W. Milnor, *Link groups*, Ann. of Math. **59** (1954) 177–195.

[Mi2] ———, *Isotopy of links*, in "Algebraic geometry and topology. A symposium in honor of S. Lefschetz", 280–306, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957

[O] K. Orr, *Homotopy invariants of links*, Inventiones Math. **95** (1989), 379–394.

[SW] A. A. Suslin and M. Wodzicki, *Excision in algebraic K-theory*, Ann. of Math. (2), **136** (1): 51–122, 1992.