LMOV 予想とその精密化

亀山 昌也 *
名古屋大学 多元数理科学研究科

概要

Labastida-Mariño-Ooguri-Vafa (LMOV) 予想の背景とその精密化について解説する.

1 Introduction

双対性とは一見異なる物理理論の間の等価性を意味し, large N 双対性は一般にある $U(N)$ ゲージ理論の large N 極限がある弦理論と等価になるという't Hooft のアイデアを指す. LMOV(Labastida-Marino-Ooguri-Vafa) 予想 [OV00, LMn01, LMn02, LMnV00] は Chen-Simons(ゲージ) 理論と位相的弦理論の間の large N 双対性を背景とする予想のひとつである. この双対性は Gopakumar と Vafa [GV99] によって提案された. より正確には, 彼らは S^3 上の Chern-Simons 理論と resolved conifold と呼ばれる多様体の上の位相的閉弦の分配関数が等価になると主張した. また彼らは同時期の研究 [GV98a, GV98b] で位相的弦理論の次の整数性を予想した. 位相的弦理論の分配関数は Gromov-Witten 不変量と呼ばれる数え上げ不変量の母関数であることが知られているが, Gromov-Witten 不変量は有理数に値をとる. 彼らはこの母関数が別の整数値不変量 (これは Gopakumar-Vafa 不変量と呼ばれる) の母関数として書き表すことができると主張した.

これを S^3 内部に結び目を含む場合に拡張したものが LMOV の仕事 [OV00, LMn01, LMn02, LMnV00] である. 彼らの予想の主張は次の２つである. (i)HOMFLY-PT 多項式の母関数と open Gromov-Witten 不変量の母関数の等価となる, (ii)open Gromov-Witten 不変量の母関数が別の整数値不変量 (LMOV 不変量) の母関数として書き表す事ができる. ただし Gopakumar-Vafa の場合 (閉弦) に比べて LMOV の場合 (開弦) は位相的弦理論側が難しいためこれらの直接検証は困難である. これら各々の主張の検証は困難であるが２つを組み合わせると open Gromov-Witten 不変量の話を忘れて, 単に HOMFLY-PT 多項式の母関数の整数性に関する予想を得ることができる. 本稿では (i), (ii) を組み合わせて得られる予想を LMOV の integrality 予想と呼ぶことにする. 以下では integrality 予想から始めてその "精密化" まで紹介まで紹介したい.

本題に入る前にいくつか注意を述べたい. まず物理と数学で定義, 計算される量子不変量では記号の使い方が異なる. 本稿で取り上げたい量子不変量は colored HOMFLY-PT 多項式及びその圏化によってできるホモロジー的不変量である. Colored HOMFLY-PT 多項式は既知とするが本稿では Chern-Simons 理論で計算される不変量として *unreduced* colored HOMFLY-PT 多項式を想定している. *unreduced* とは unknot に対して 1 となる

* m13020v@math.nagoya-u.ac.jp

ように規格化しないという意味である．以下では unreduced colored HOMFLY-PT 多項式を $\overline{H}_\lambda(K;a,q)$ とし，バーを付けて unreduced を表す．これに対し unknot に対して 1 となるように規格化した不変量は *reduced* と呼ばれ $H_\lambda(K;a,q)$ の様にバーを付けないことで redunced を表すことにする．両者の関係は

$$\frac{\overline{H}_\lambda(K;a,q)}{\overline{H}_\lambda(\bigcirc;a,q)} = H_\lambda(K;a,q) \in \mathbb{Z}[a^{\pm\frac{1}{2}}, q^{\pm\frac{1}{2}}]$$

となる．記号の統一のため uncolored HOMFLY-PT 多項式 $H(K;a,q) := H_\square(K;a,q)$ の Skein 関係式[*1]を与える:

$$a^{\frac{1}{2}}H(L_+;a,q) - a^{-\frac{1}{2}}H(L_-;a,q) = (q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})H(L_0;a,q). \tag{1}$$

ややこしい事に結び目ホモロジーは次の Skein 関係式の流儀で研究が進んでいる:

$$\mathbf{a}H(L_+;\mathbf{a},\mathbf{q}) - \mathbf{a}^{-1}H(L_-;\mathbf{a},\mathbf{q}) = (\mathbf{q} - \mathbf{q}^{-1})H(L_0;\mathbf{a},\mathbf{q}). \tag{2}$$

Colored HOMFLY-PT 多項式の段階では変数の冪が少々異なるだけであるが “精密化”(あるいは圏化) 後は後に述べる変数変換の様に単純でない違いとなる．

また本稿では Schur 対称関数 $s_\lambda(x)$ と Macdonald 対称関数 $P_\lambda(x;q,t)$ が登場する．実際に計算する場合にはこれらの正体を知る必要があるが以下の内容はこれらの定義を知らなくても読めるように書いたつもりである．Macdonald 対称関数は $t=q$ で Schur 対称関数に一致する ($P_\lambda(x;q,q) = s_\lambda(x)$) という性質があり，この事実を知っていれば十分である．詳しい定義が知りたい場合は [Mac98] を参照せよ．

2 LMOV の integrality 予想

定義 2.1 次の式を通じて reformulated invariants $f_\lambda(K;a,q)$ を定義する:

$$\sum_\lambda \overline{H}_\lambda(K;a,q)s_\lambda(x) = \exp\left(\sum_{d=1}^{\infty}\sum_\lambda \frac{1}{d}\frac{f_\lambda(K;a^d,q^d)}{q^{\frac{d}{2}} - q^{-\frac{d}{2}}} s_\lambda(x^d)\right). \tag{3}$$

ここで $\overline{H}_\lambda(K;a,q)$ は結び目 K に対する unreduced HOMFLY-PT 多項式, $s_\lambda(x)$ は Schur 関数, λ は Young 図であり, 和は全ての Young 図に対するものである．

(3) で両辺を Schur 対称関数を冪和対称関数に展開した上で, 引数に注意しながら係数を比べることで $f_\lambda(K;a,q)$ を HOMFLY-PT 多項式の組み合わせとして表示することができる (plethystic exponential と plethystic logarithm を使うと $f_\lambda(K;a,q)$ の一般公式が導出でき

[*1] 符号が間違っているかもしれないが本質的な差ではないためご容赦願いたい．

るがここでは省略する). 具体的に Young 図の小さいものから列挙すると

$$
\begin{aligned}
\frac{f_{\square}}{q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}}} &= \overline{H}_{\square}, \\
\frac{f_{\square\square}}{q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}}} &= \overline{H}_{\square\square} - \frac{1}{2}\overline{H}_{\square}^{2} - \frac{1}{2}\overline{H}_{\square}^{(2)}, \\
\frac{f_{\substack{\square\\\square}}}{q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}}} &= \overline{H}_{\substack{\square\\\square}} - \frac{1}{2}\overline{H}_{\square}^{2} + \frac{1}{2}\overline{H}_{\square}^{(2)}, \\
\frac{f_{\square\square\square}}{q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}}} &= \overline{H}_{\square\square\square} - \overline{H}_{\square\square}\overline{H}_{\square} + \frac{1}{3}\overline{H}_{\square}^{3} - \frac{1}{3}\overline{H}_{\square}^{(3)}, \\
\frac{f_{\substack{\square\square\\\square}}}{q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}}} &= \overline{H}_{\substack{\square\square\\\square}} - \left[\overline{H}_{\square\square} + \overline{H}_{\substack{\square\\\square}}\right]\overline{H}_{\square} + \frac{2}{3}\overline{H}_{\square}^{3} + \frac{1}{3}\overline{H}_{\square}^{(3)}, \\
\frac{f_{\substack{\square\\\square\\\square}}}{q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}}} &= \overline{H}_{\substack{\square\\\square\\\square}} - \overline{H}_{\substack{\square\\\square}}\overline{H}_{\square} + \frac{1}{3}\overline{H}_{\square}^{3} - \frac{1}{3}\overline{H}_{\square}^{(3)},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

等となる. ここで $f_\lambda = f_\lambda(K;a,q)$, $\overline{H}_\lambda^{(d)} = \overline{H}_\lambda(K;a^d,q^d)$ とした. このように reformulated invariants は colored HOMFLY-PT 多項式の和であるので結び目不変量である. 逆に HOMFLY-PT 多項式を reformulated invariants の和で書くこともできるため, この意味で両者は等価な不変量である.

Integrality 予想[*2]は reformulated invariants に colored HOMFLY-PT 多項式の値を代入したときの予想である.

予想 2.2 reformulated invariants $f_\lambda(K;a,q)$ は整数 $\widehat{N}_{\rho,g,\beta}$ が存在して次の形に書ける:

$$
f_\lambda(a,q) = \sum_{g=0}^{\infty}\sum_{a\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}}\sum_{\sigma,\rho:\mathrm{Young}} C_{\lambda\sigma\rho}B_\sigma(q)\widehat{N}_{\rho,g,\beta}(q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}})^{2g}a^{\beta}. \tag{5}
$$

ここで $C_{\lambda\sigma\rho}$ は置換群の Clebsch-Gordon 係数,

$$
B_\sigma(q) = \begin{cases} (-q)^d t^{-\frac{|\sigma|-1}{2}} & \sigma : \text{hook rep for } \wedge^d V \\ 0 & \sigma : \text{otherwise} \end{cases}. \tag{6}
$$

である.

整数 $\widehat{N}_{\rho,g,\beta}(K)$ を LMOV 不変量[*3]と言う. いくつか補足と注意をする. まず予想 2.2では次

[*2] Reformulated invariants は絡み目に対しても定義でき, この場合も integrality が予想されている. 定義と予想の主張は若干異なるので詳しくは [LMn02, LMnV00] を参照せよ.

[*3] $f_\lambda(K;a,q)$ は次の構造を持つことも予想されている:

$$
f_\lambda(K;a,q) = \sum_{s,\beta\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} N_{\lambda,s,\beta}(K)q^s a^\beta \in \mathbb{Z}[a^{\pm\frac{1}{2}},q^{\pm\frac{1}{2}}]. \tag{7}
$$

$N_{\lambda,s,\beta}$ も整数でこれは Ooguri-Vafa 不変量と呼ばれる.

の様な記号を導入すると予想の検証が便利にできる:

$$
\begin{aligned}
f_\lambda(K;a,q) &= \sum_\rho M_{\lambda\rho}(q)\widehat{f}_\rho(K;a,q), \\
M_{\mu\rho}(q) &= \sum_\sigma C_{\mu\sigma\rho}B_\sigma(q).
\end{aligned}
\tag{8}
$$

こうすると $M_{\mu\rho}(q)$ は可逆な行列 (の成分) と見ることができて $f_\lambda(K;a,q)$ に $M^{-1}_{\mu\rho}(q)$ を掛けて $\widehat{f}_\rho(K;a,q)$ が計算でき,

$$
\widehat{f}_\rho(K;a,q) = \sum_{g=0}^{\infty}\sum_{a\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} \widehat{N}_{\rho,g,\beta}(K)(q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}})^{2g}a^\beta \in \mathbb{Z}[a^{\pm\frac{1}{2}}, q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}}]
\tag{9}
$$

を確認すれば良いということになる. $\widehat{f}_\rho(K;a,q)$ も reformulated invariants と言う. 具体的には

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}_{\square} &= f_{\square} \\
\begin{pmatrix} \widehat{f}_{\square\square} \\ \widehat{f}_{\substack{\square\\\square}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} q^{-\frac{1}{2}} & -q^{\frac{1}{2}} \\ -q^{\frac{1}{2}} & q^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_{\square\square} \\ f_{\substack{\square\\\square}} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \widehat{f}_{\square\square\square} \\ \widehat{f}_{\substack{\square\square\\\square}} \\ \widehat{f}_{\substack{\square\\\square\\\square}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} q^{-1} & -1 & q \\ -1 & q-1+q^{-1} & -1 \\ q & -1 & q^{-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_{\square\square\square} \\ f_{\substack{\square\square\\\square}} \\ f_{\substack{\square\\\square\\\square}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

等となる.

Reformulated invariants の例の内 unknot に対する例が最も特徴的である.

事実 2.3

$$
\widehat{f}(\bigcirc;a,q) = f(\bigcirc;a,q) = \begin{cases} a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}} & \lambda = \square \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.
\tag{11}
$$

これは unknot の unreduced colored HOMFLY-PT 多項式は量子次元で定義され, 量子次元は Schur 対称関数の特殊値で与えられるという事実と Schur 対称関数に対する Cauchy 公式を用いることで簡単に証明できる.

Unknot 以外の結び目に対しては実際に Young 図の箱の数が小さい reformulated invariants を計算することによって予想が検証されている. LMOV の論文の他に [ZR12, MMM$^+$17] 等でも検証が行われている. また integrality 予想は [LP07] によって証明が与えられている (筆者は詳細を追っていないので証明の正しさは保証しない).

3 Refined Chern-Simons invariants and homological knot invariants

2004 年頃から位相的弦理論で "精密化" と呼ばれる方向の研究 [GSV05, AK05, IKV09] が始まるようになった. この頃から既に結び目ホモロジーと精密化された位相的弦理論 (refined topological string theory) の間には関係があることが [GSV05, GIKV10] で既に認識されていた. この節ではこれらを背景として Aganagic と Shakirov [AS15] が提案した refined

Chern-Simons 理論と結び目ホモロジー, 特に colored HOMFLY-PT ホモロジーとの関係を述べたい. しかし筆者の勉強不足のため全てを正しく正確に述べることは難しく, 特に refined Chern-Simons 理論は物理的に仮想的に存在が仮定されている理論であり, "理論" の定義は数学者に満足行く説明*4はできない. またこの理論より与えられる refined Chern-Simons 不変量は天下り的に定義を述べることもできるが大変なので参考文献を挙げて省略する. 理論や不変量を導出する際の物理的アイデアが知りたい場合は [AS15, AS12] 等を, refined Chern-Simons 不変量の数学的なアプローチが知りたい場合は [Che13, GN15] を参照して欲しい. 日本語の解説 [藤 12] も参考になる.

以下では refined Chern-Simons 不変量 $\overline{\mathrm{rCS}}_\lambda(T_{n,m};a,q,t)$ の重要な特徴及び観察を述べたい.

1. Refined Chern-Simons 不変量はトーラス結び目/絡み目の場合しか定義できていない.
2. Refined Chern-Simons 不変量は $t=q$ で colored HOMFLY-PT 多項式に一致する:
$$\overline{\mathrm{rCS}}_\lambda(T_{m,n};a,q,q)=\overline{H}_\lambda(T_{m,n};a,q). \tag{12}$$
3. 上述の 1., 2. はトーラス結び目/絡み目の colored HOMFLY-PT 多項式は Schur 対称関数を使って計算でき, そして refined Chern-Simons 不変量はその計算を適切に Macdonald 対称関数に置き換えたものになっているという事情による. (Macdonald 対称関数は $t=q$ で Schur 対称関数に一致する:$P_\lambda(x;q,q)=s_\lambda(x)$.)
4. Reduced refined Chern-Simons 不変量を
$$\mathrm{rCS}_\lambda(T_{m,n};a,q,t):=\overline{\mathrm{rCS}}_\lambda(T_{m,n};a,q,t)/\overline{\mathrm{rCS}}_\lambda(\bigcirc;a,q,t) \tag{13}$$
とする. このとき $\mathrm{rCS}_\square(T_{m,n};a,q,t)$ は変数変換
$$a=-\mathbf{a}^2\mathbf{t}\ ,\quad q^{\frac{1}{2}}=-\mathbf{q}\mathbf{t}\ ,\quad t^{\frac{1}{2}}=\mathbf{q}\ . \tag{14}$$
の下で HOMFLY-PT 多項式 (あるいは量子 $\mathfrak{sl}_n$ 不変量) の圏化により得られるホモロジー的結び目不変量 [KR08a, KR08b] を再現*5する. また反対称表現 (例えば $\lambda=\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}$ 等) の場合 [Yon11] を再現する.
5. 一般に, λ が長方形の Young 図の場合 $\mathrm{rCS}_\lambda(T_{m,n};a,q,t)$ は変数変換 (14) の下で (全体の因子を除き) 非負整数係数の Laurent 多項式となることが予想されている.
6. 長方形以外の Young 図の場合 $\mathrm{rCS}_\lambda(T_{m,n};a,q,t)$ は変数変換 (14) 後に正負の整数係数を持つことがある. 実際,
$$\mathrm{rCS}_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}(T_{2,3};a,q,t)=$$
$$\tfrac{\mathbf{a}^{12}}{\mathbf{q}^{20}}(\mathbf{a}^6\mathbf{q}^{10}\mathbf{t}^{15}(\mathbf{q}^{20}\mathbf{t}^{10}+2\mathbf{q}^{16}\mathbf{t}^8-(\mathbf{q}^2-2)\mathbf{q}^8\mathbf{t}^4+(-\mathbf{q}^8+2\mathbf{q}^6+\mathbf{q}^4)\mathbf{q}^6\mathbf{t}^6-(\mathbf{q}^2-2)\mathbf{q}^4\mathbf{t}^2+$$
$$1)+\mathbf{a}^4\mathbf{q}^4\mathbf{t}^8((\mathbf{q}^2+1)\mathbf{q}^{30}\mathbf{t}^{16}+(2\mathbf{q}^2+3)\mathbf{q}^{26}\mathbf{t}^{14}+(-\mathbf{q}^6+2\mathbf{q}^4+5\mathbf{q}^2+1)\mathbf{q}^{20}\mathbf{t}^{12}+(-2\mathbf{q}^{12}+$$

*4 Refined Chern-Simons 理論は non-Lagrangian 理論と呼ばれるもののひとつになっている. 普通の Chern-Simons 理論は Lagrangian があるのに対し refined Chern-Simons 理論には Lagrangian が (見つかってい) ない. 伝統的に物理では Lagrangian を与えて場の理論を定義するというやり方が一般的であるが近年では Lagrangian がない (かもしれない) 場の理論が研究されている. 一方数学的に見れば位相的場の理論は Atiyah の公理 [Ati89] を満たしていれば良くそもそも Lagrangian 無しで定義される. Refined Chern-Simons 理論は Atiyah の公理を満たしているわけでは無く, むしろ "Atiyah の公理を満たすもの" として定義される. この様な事情を踏まえて満足の行く説明をすることは筆者には困難である.

*5 一般のトーラス結び目/絡み目で証明が与えられているかどうかは不明.

$$\mathbf{q}^{10}+6\mathbf{q}^{8}+\mathbf{q}^{6})\mathbf{q}^{10}\mathbf{t}^{10}+(-2\mathbf{q}^{4}+\mathbf{q}^{2}+5)\mathbf{q}^{10}\mathbf{t}^{6}+(-2\mathbf{q}^{10}+\mathbf{q}^{8}+6\mathbf{q}^{6}+\mathbf{q}^{4})\mathbf{q}^{8}\mathbf{t}^{8}+(-2\mathbf{q}^{4}+2\mathbf{q}^{2}+3)\mathbf{q}^{6}\mathbf{t}^{4}+(-\mathbf{q}^{4}+2\mathbf{q}^{2}+1)\mathbf{q}^{2}\mathbf{t}^{2}+1)+\mathbf{a}^{2}\mathbf{t}^{3}(\mathbf{q}^{40}\mathbf{t}^{20}+(3\mathbf{q}^{2}+1)\mathbf{q}^{34}\mathbf{t}^{18}+(-\mathbf{q}^{4}+5\mathbf{q}^{2}+3)\mathbf{q}^{30}\mathbf{t}^{16}+(-3\mathbf{q}^{6}+6\mathbf{q}^{4}+5\mathbf{q}^{2}+1)\mathbf{q}^{24}\mathbf{t}^{14}+(-4\mathbf{q}^{6}+6\mathbf{q}^{4}+6\mathbf{q}^{2}+1)\mathbf{q}^{20}\mathbf{t}^{12}+(-5\mathbf{q}^{4}+6\mathbf{q}^{2}+5)\mathbf{q}^{14}\mathbf{t}^{8}+(-5\mathbf{q}^{12}+5\mathbf{q}^{10}+6\mathbf{q}^{8}+\mathbf{q}^{6})\mathbf{q}^{10}\mathbf{t}^{10}+(-4\mathbf{q}^{4}+6\mathbf{q}^{2}+3)\mathbf{q}^{10}\mathbf{t}^{6}+(-3\mathbf{q}^{6}+5\mathbf{q}^{4}+\mathbf{q}^{2})\mathbf{q}^{4}\mathbf{t}^{4}-(\mathbf{q}^{2}-3)\mathbf{q}^{4}\mathbf{t}^{2}+1)+\mathbf{q}^{40}\mathbf{t}^{20}+2\mathbf{q}^{36}\mathbf{t}^{18}-2(\mathbf{q}^{4}-2\mathbf{q}^{2}-1)\mathbf{q}^{26}\mathbf{t}^{14}+(-3\mathbf{q}^{6}+4\mathbf{q}^{4}+2\mathbf{q}^{2}+1)\mathbf{q}^{20}\mathbf{t}^{12}+(-3\mathbf{q}^{4}+4\mathbf{q}^{2}+2)\mathbf{q}^{18}\mathbf{t}^{10}+(-\mathbf{q}^{18}+4\mathbf{q}^{16}+\mathbf{q}^{14})\mathbf{q}^{16}\mathbf{t}^{16}+(-3\mathbf{q}^{4}+4\mathbf{q}^{2}+2)\mathbf{q}^{14}\mathbf{t}^{8}-2(\mathbf{q}^{2}-2)\mathbf{q}^{8}\mathbf{t}^{4}+(-3\mathbf{q}^{8}+4\mathbf{q}^{6}+\mathbf{q}^{4})\mathbf{q}^{6}\mathbf{t}^{6}-(\mathbf{q}^{2}-2)\mathbf{q}^{4}\mathbf{t}^{2}+1)$$

となる．ホモロジー的結び目不変量は定義から非負整数係数の Laurent 多項式であるため, このように正負両方の整数係数を持つ多項式は定義によりホモロジー的結び目不変量では無い.

7. Refine Chern-Simons 不変量を定義する際にホモロジーを構成しているわけではない.

Refined Chern-Simons 不変量は部分的には結び目ホモロジーと整合性が取れているためこの不変量は colored HOMFLY-PT ホモロジーに対する情報を持っていることが期待されるが, 上の 6,7 の理由により refined Chern-Simons 不変量がホモロジー的結び目不変量になる必然性はない.

4 Positivity conjecture of refined Chern-Simons invariants

筆者は縄田氏との共同研究 [KN17] で LMOV 予想の精密化を提案した．ここではその結果得られる positivity 予想 (integrality 予想の精密化) を紹介したい.

定義 4.1 次の式を通じて refined reformulated invariants $f^{q}_{\mu}(T_{m,n};a,q,t)$, $f^{\bar{t}}_{\mu}(T_{m,n};a,q,t)$ を定義する:

$$\sum_{\lambda}\overline{\mathrm{rCS}}_{\lambda}(T_{m,n};a,q,t)\;g_{\lambda}(q,t)P_{\lambda}(x;q,t)=\exp\left(\sum_{d=1}^{\infty}\sum_{\mu}\frac{1}{d}\frac{f^{q}_{\mu}(T_{m,n};a^{d},q^{d},t^{d})}{q^{\frac{d}{2}}-q^{-\frac{d}{2}}}s_{\mu}(x^{d})\right),$$

$$\sum_{\lambda}\overline{\mathrm{rCS}}_{\lambda}(T_{m,n};a,q,t)\;P_{\lambda^{T}}(-x;t,q)=\exp\left(\sum_{d=1}^{\infty}\sum_{\mu}\frac{1}{d}\frac{f^{\bar{t}}_{\mu}(T_{m,n};a^{d},q^{d},t^{d})}{t^{-\frac{d}{2}}-t^{\frac{d}{2}}}s_{\mu}(x^{d})\right),$$

ここで $P_{\lambda}(x;q,t)$ は Macdonald 対称関数である.

Refined reformulated invariants の添字 q, $\bar{t}$ は物理側の設定に対応した単なるラベルである. 精密化前の時同様に両辺を展開して係数比較をすることで以下の表示を得る.

$$
\begin{aligned}
\frac{f^q_{\yng(1)}}{t^{\frac12}-t^{-\frac12}} &= \overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1)}, \\
\frac{t^{\frac12}}{q^{\frac12}}\frac{f^q_{\yng(2)}}{t^{\frac12}-t^{-\frac12}} &= \frac{qt-1}{q^2-1}\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(2)} - \frac{t-1}{2(q-1)}(\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1)})^2 - \frac{t+1}{2(q+1)}\overline{\mathrm{rCS}}^{(2)}_{\yng(1)} , \\
\frac{t^{\frac12}}{q^{\frac12}}\frac{f^q_{\yng(1,1)}}{t^{\frac12}-t^{-\frac12}} &= \frac{t-q}{q^2-1}\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(2)} + \frac{t^2-1}{qt-1}\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1,1)} - \frac{t-1}{2(q-1)}(\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1)})^2 + \frac{t+1}{2(q+1)}\overline{\mathrm{rCS}}^{(2)}_{\yng(1)} , \\
\frac{t}{q}\frac{f^q_{\yng(3)}}{t^{\frac12}-t^{-\frac12}} &= \frac{(qt-1)\left(q^2t-1\right)}{(q^2-1)\left(q^3-1\right)}\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(3)} - \frac{(t-1)(qt-1)}{(q-1)^2(q+1)}\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(2)}\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1)} \\
&\quad + \frac{(t-1)^2}{3(q-1)^2}(\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1)})^3 - \frac{t^2+t+1}{3\left(q^2+q+1\right)}\overline{\mathrm{rCS}}^{(3)}_{\yng(1)} , \\
\frac{t}{q}\frac{f^q_{\yng(2,1)}}{t^{\frac12}-t^{-\frac12}} &= -\frac{(q-t)(qt-1)}{(q-1)(q^3-1)}\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(3)} + \frac{(t-1)\left(qt^2-1\right)}{(q-1)\left(q^2t-1\right)}\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(2,1)} \\
&\quad - \left[\frac{(t-1)^2}{(q-1)^2}\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(2)} + \frac{(t-1)^2(t+1)}{(q-1)(qt-1)}\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1,1)}\right]\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1)} \\
&\quad + \frac{2(t-1)^2}{3(q-1)^2}(\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1)})^3 + \frac{t^2+t+1}{3\left(q^2+q+1\right)}\overline{\mathrm{rCS}}^{(3)}_{\yng(1)} , \\
\frac{t}{q}\frac{f^q_{\yng(1,1,1)}}{t^{\frac12}-t^{-\frac12}} &= \frac{(q-t)\left(q^2-t\right)}{(q^2-1)(q^3-1)}\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(3)} - \frac{(t^2-1)(q-t)}{(q-1)\left(q^2t-1\right)}\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(2,1)} + \frac{(t^2-1)(t^3-1)}{(qt-1)\left(qt^2-1\right)}\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1,1,1)} \\
&\quad + \left[\frac{(t-1)(q-t)}{(q-1)^2(q+1)}\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(2)} - \frac{(t-1)^2(t+1)}{(q-1)(qt-1)}\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1,1)}\right]\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1)} \\
&\quad + \frac{(t-1)^2}{3(q-1)^2}(\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1)})^3 - \frac{t^2+t+1}{3\left(q^2+q+1\right)}\overline{\mathrm{rCS}}^{(3)}_{\yng(1)},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{f^{\bar t}_{\yng(1)}}{t^{\frac12}-t^{-\frac12}} &= \overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1)}, \\
\frac{-f^{\bar t}_{\yng(2)}}{t^{\frac12}-t^{-\frac12}} &= \overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1,1)} + \frac12\overline{\mathrm{rCS}}^{(2)}_{\yng(1)} - \frac12(\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1)})^2 , \\
\frac{-f^{\bar t}_{\yng(1,1)}}{t^{\frac12}-t^{-\frac12}} &= \overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(2)} + \frac{q-t}{qt-1}\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1,1)} - \frac12\overline{\mathrm{rCS}}^2_{\yng(1)} - \frac12\overline{\mathrm{rCS}}^{(2)}_{\yng(1)}, \\
\frac{f^{\bar t}_{\yng(3)}}{t^{\frac12}-t^{-\frac12}} &= \overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1,1,1)} - \overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1)}\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1,1)} + \frac13(\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1)})^3 - \frac13\overline{\mathrm{rCS}}^{(3)}_{\yng(1)} , \\
\frac{f^{\bar t}_{\yng(2,1)}}{t^{\frac12}-t^{-\frac12}} &= \overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(2,1)} + \frac{(t+1)(q-t)}{qt^2-1}\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1,1,1)} - \left[\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(2)} + \frac{(q-1)(t+1)}{qt-1}\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1,1)}\right]\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1)} \\
&\quad + \frac23(\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1)})^3 + \frac13\overline{\mathrm{rCS}}^{(3)}_{\yng(1)}, \\
\frac{f^{\bar t}_{\yng(1,1,1)}}{t^{\frac12}-t^{-\frac12}} &= \overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(3)} + \frac{(q+1)(q-t)}{q^2t-1}\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(2,1)} + \frac{(q-t)\left(q-t^2\right)}{(qt-1)\left(qt^2-1\right)}\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1,1,1)} \\
&\quad + \left[-\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(2)} + \frac{(q-t)}{qt-1}\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1,1)}\right]\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1)} + \frac13(\overline{\mathrm{rCS}}_{\yng(1)})^3 - \frac13\overline{\mathrm{rCS}}^{(3)}_{\yng(1)} .
\end{aligned}
$$

ここで $\overline{\mathrm{rCS}}^{(d)}_{\lambda} := \overline{\mathrm{rCS}}_{\lambda}(T_{m,n}; a^d, q^d, t^d)$ とした.

予想 4.2 refined reformulated invariants $f^q_\mu(T_{m,n};a,q,t), f^{\bar{t}}_\mu(T_{m,n};a,q,t)$ は共通部分 $\widehat{f}_\rho(T_{m,n};a,q,t)$ を持つ:

$$f^q_\mu(T_{m,n};a,q,t)=\sum_\rho M_{\mu\rho}(t)\widehat{f}_\rho(T_{m,n};a,q,t)\ ,$$

$$f^{\bar{t}}_\mu(T_{m,n};a,q,t)=\sum_\rho M_{\mu\rho}(q^{-1})\widehat{f}_\rho(T_{m,n};a,q,t)\ ,$$

精密化前同様に $\widehat{f}_\rho(T_{m,n};a,q,t)$ も refined reformulated invariants と言う．refined Chern-Simons 不変量の性質 2. と Macdonald 対称関数の性質により $t=q$ で refined reformulated invariants $f^q_\rho(T_{m,n};a,q,t)$, $\widehat{f}_\rho(T_{m,n};a,q,t)$ は元の reformulated invariants に戻る．$\widehat{f}_\rho(T_{m,n};a,q,t)$ に refined Chern-Simons 不変量を代入した場合の次の予想が本題である．

予想 4.3 $\widehat{f}_\rho(T_{m,n};a,q,t)$ はある非負整数 $\widehat{N}_{\rho,g,\beta,J_r}(T_{m,n})$ が存在して次の形で書ける:

$$\widehat{f}_\rho(T_{m,n};a,q,t)=\sum_{g\geq 0}\sum_{\beta,J_r}(-1)^{2J_r}\widehat{N}_{\rho,g,\beta,J_r}(T_{m,n})(q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}})^g(t^{-\frac{1}{2}}-t^{\frac{1}{2}})^g\left(\frac{q}{t}\right)^{J_r-\frac{\beta}{2}}a^\beta$$

予想 4.3では変数 (a,q,t) を使うと実際には負の整数係数を持つ Laurent 多項式であるが全体で $a^{\pm\frac{1}{2}}$ のシフト[*6]を許した上で変数変換 (14) を行なうと非負整数係数の Laurent 多項式となる:

$$\widehat{f}_\rho(T_{m,n};\mathbf{a},\mathbf{q},\mathbf{t})=\sum_{g\geq 0}\sum_{\beta,F\in\mathbb{Z}}\widehat{N}_{\rho,g,\beta,J_r}(T_{m,n})(\mathbf{qt}-\mathbf{q}^{-1}\mathbf{t}^{-1})^g(\mathbf{q}-\mathbf{q}^{-1})^g\mathbf{a}^{2\beta}\mathbf{t}^{2J_r}\ . \tag{15}$$

更に

予想 4.4 $\widehat{f}_\rho(T_{m,n};\mathbf{a},\mathbf{q},\mathbf{t})$ は更に $(\mathbf{qt}-\mathbf{q}^{-1}\mathbf{t}^{-1})(\mathbf{q}-\mathbf{q}^{-1})$ の部分を展開しても非負整数係数 $\widehat{\mathbf{N}}_{\mu;i,j,k}(T_{m,n})$ を持つ．

$$\widehat{f}_\rho(T_{m,n};\mathbf{a},\mathbf{q},\mathbf{t})=\sum_{i,j,k}\widehat{\mathbf{N}}_{\mu;i,j,k}(T_{m,n})\mathbf{a}^{2i}\mathbf{q}^{2j}\mathbf{t}^k\ . \tag{16}$$

という予想も得た．　精密化前同様に unknot の場合は Macdonald 対称関数に対する Cauchy 公式を使うことで全ての Young 図に大して refined reformulated invariants を計算することができる (unknot の refined Chern-Simons 不変量は Mandonald 対称関数の特殊値として与えられる)．他の結び目に対しては具体的に計算することで予想の検証ができる．例えば具体的に計算すると

$$\widehat{f}_{\square}(T_{2,3})= \tag{17}$$

$(\mathbf{t}^{24}+6\mathbf{g}\mathbf{t}^{23}+15\mathbf{g}^2\mathbf{t}^{22}+2\mathbf{t}^{22}+20\mathbf{g}^3\mathbf{t}^{21}+15\mathbf{g}\mathbf{t}^{21}+15\mathbf{g}^4\mathbf{t}^{20}+40\mathbf{g}^2\mathbf{t}^{20}+4\mathbf{t}^{20}+6\mathbf{g}^5\mathbf{t}^{19}+50\mathbf{g}^3\mathbf{t}^{19}+27\mathbf{g}\mathbf{t}^{19}+\mathbf{g}^6\mathbf{t}^{18}+30\mathbf{g}^4\mathbf{t}^{18}+63\mathbf{g}^2\mathbf{t}^{18}+7\mathbf{t}^{18}+7\mathbf{g}^5\mathbf{t}^{17}+61\mathbf{g}^3\mathbf{t}^{17}+39\mathbf{g}\mathbf{t}^{17}+21\mathbf{g}^4\mathbf{t}^{16}+67\mathbf{g}^2\mathbf{t}^{16}+11\mathbf{t}^{16}+36\mathbf{g}^3\mathbf{t}^{15}+42\mathbf{g}\mathbf{t}^{15}+39\mathbf{g}^2\mathbf{t}^{14}+12\mathbf{t}^{14}+26\mathbf{g}\mathbf{t}^{13}+9\mathbf{t}^{12})\mathbf{a}^{14}+$
$(2\mathbf{t}^{23}+13\mathbf{g}\mathbf{t}^{22}+36\mathbf{g}^2\mathbf{t}^{21}+6\mathbf{t}^{21}+55\mathbf{g}^3\mathbf{t}^{20}+44\mathbf{g}\mathbf{t}^{20}+50\mathbf{g}^4\mathbf{t}^{19}+125\mathbf{g}^2\mathbf{t}^{19}+14\mathbf{t}^{19}+$

[*6] 例えば全体の因子に $a^{\frac{1}{2}}$ が出てくると変数変換後に $\sqrt{-\mathbf{a}^2\mathbf{t}}$ の様な因子が出てしまことがある．こういった因子が出ない様に $a^{\pm\frac{1}{2}}$ のシフトを許している．

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{27g^5t^{18}+180g^3t^{18}+97gt^{18}+8g^6t^{17}+140g^4t^{17}+249g^2t^{17}+27t^{17}+g^7t^{16}+56g^5t^{16}+}\\
&\mathbf{299g^3t^{16}+163gt^{16}+9g^6t^{15}+169g^4t^{15}+338g^2t^{15}+47t^{15}+36g^5t^{14}+287g^3t^{14}+}\\
&\mathbf{214gt^{14}+84g^4t^{13}+300g^2t^{13}+63t^{13}+126g^3t^{12}+190gt^{12}+124g^2t^{11}+59t^{11}+75gt^{10}+}\\
&\mathbf{21t^9)a^{12}+(t^{22}+7gt^{21}+21g^2t^{20}+6t^{20}+35g^3t^{19}+42gt^{19}+35g^4t^{18}+121g^2t^{18}+}\\
&\mathbf{17t^{18}+21g^5t^{17}+185g^3t^{17}+119gt^{17}+7g^6t^{16}+160g^4t^{16}+321g^2t^{16}+39t^{16}+g^7t^{15}+}\\
&\mathbf{76g^5t^{15}+428g^3t^{15}+244gt^{15}+17g^6t^{14}+293g^4t^{14}+559g^2t^{14}+76t^{14}+g^7t^{13}+93g^5t^{13}+}\\
&\mathbf{579g^3t^{13}+387gt^{13}+9g^6t^{12}+261g^4t^{12}+665g^2t^{12}+122t^{12}+36g^5t^{11}+440g^3t^{11}+}\\
&\mathbf{446gt^{11}+84g^4t^{10}+469g^2t^{10}+141t^{10}+125g^3t^9+301gt^9+119g^2t^8+89t^8+66gt^7+}\\
&\mathbf{16t^6)a^{10}+(2t^{19}+13gt^{18}+36g^2t^{17}+8t^{17}+55g^3t^{16}+55gt^{16}+50g^4t^{15}+150g^2t^{15}+}\\
&\mathbf{25t^{15}+27g^5t^{14}+210g^3t^{14}+155gt^{14}+8g^6t^{13}+160g^4t^{13}+369g^2t^{13}+57t^{13}+g^7t^{12}+}\\
&\mathbf{63g^5t^{12}+422g^3t^{12}+308gt^{12}+10g^6t^{11}+233g^4t^{11}+591g^2t^{11}+110t^{11}+51g^5t^{10}+}\\
&\mathbf{484g^3t^{10}+454gt^{10}+g^6t^9+150g^4t^9+601g^2t^9+158t^9+7g^5t^8+269g^3t^8+434gt^8+}\\
&\mathbf{21g^4t^7+299g^2t^7+142t^7+35g^3t^6+190gt^6+34g^2t^5+52t^5+18gt^4+4t^3)a^8+(t^{16}+}\\
&\mathbf{6gt^{15}+15g^2t^{14}+6t^{14}+20g^3t^{13}+35gt^{13}+15g^4t^{12}+81g^2t^{12}+19t^{12}+6g^5t^{11}+94g^3t^{11}+}\\
&\mathbf{102gt^{11}+g^6t^{10}+56g^4t^{10}+203g^2t^{10}+46t^{10}+15g^5t^9+184g^3t^9+203gt^9+g^6t^8+72g^4t^8+}\\
&\mathbf{304g^2t^8+85t^8+8g^5t^7+175g^3t^7+269gt^7+28g^4t^6+244g^2t^6+104t^6+55g^3t^5+188gt^5+}\\
&\mathbf{63g^2t^4+61t^4+39gt^3+10t^2)a^6+(2t^{11}+9gt^{10}+16g^2t^9+7t^9+14g^3t^8+31gt^8+6g^4t^7+}\\
&\mathbf{48g^2t^7+19t^7+g^5t^6+31g^3t^6+64gt^6+7g^4t^5+67g^2t^5+33t^5+21g^3t^4+71gt^4+33g^2t^3+}\\
&\mathbf{30t^3+26gt^2+8t)a^4+(t^6+3gt^5+3g^2t^4+3t^4+g^3t^3+7gt^3+4g^2t^2+5t^2+5gt+2)a^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{=\tfrac{a^2}{q^{14}}(a^2t+1)(a^2t+q^2)(a^2q^2t^3+1)(a^4q^{24}t^{16}(a^2t^3+1)+q^{22}t^{11}(a^3t^3+a)^2+q^{20}t^9(t^2+}\\
&\mathbf{1)(a^3t^3+a)^2+q^{18}t^6(2a^6(t^9+t^7)+a^4t^4(5t^2+3)+a^2(4t^3+t)+1)+q^{16}t^4(a^6(t^4+2t^2+}\\
&\mathbf{2)t^7+a^4(2t^4+7t^2+3)t^4+a^2(t^5+6t^3+t)+1)+q^{14}t^4(a^6(2t^9+3t^7+t^5)+a^4(6t^6+}\\
&\mathbf{8t^4+t^2)+a^2t(6t^2+5)+2)+q^{12}t^2(a^6t^5(t^2+1)^3+a^4t^4(2t^4+9t^2+6)+a^2t(t^4+9t^2+}\\
&\mathbf{2)+3)+q^{10}t^2(a^6(2t^9+3t^7+t^5)+a^4(6t^6+8t^4+t^2)+a^2t(6t^2+5)+2)+q^8(a^6(t^4+}\\
&\mathbf{2t^2+2)t^7+a^4(2t^4+7t^2+3)t^4+a^2(t^5+6t^3+t)+1)+q^6(2a^6(t^9+t^7)+a^4t^4(5t^2+}\\
&\mathbf{3)+a^2(4t^3+t)+1)+q^4t(t^2+1)(a^3t^3+a)^2+q^2t(a^3t^3+a)^2+a^6t^7+a^4t^4),}
\end{aligned}
$$

の様な結果を得る．ここで $\mathbf{g}=(\mathbf{qt}-\mathbf{q}^{-1}\mathbf{t}^{-1})(\mathbf{q}-\mathbf{q}^{-1})$ とした．このように $\yng(2,1)$ のような Young 図で負の整数係数を持った refined Chern-Simons 不変量は refined reformulated invariants では非負整数係数となった．精密化前の場合同様 refined Chern-Simons 不変量を逆に refined reformulated invariants で表す事もできるため両者は互いに対等な不変量である．

$3で述べた様に refined Chern-Simons 不変量そのものはトーラス結び目/絡み目の場合でしか定義されていないがその “候補” を使うことでトーラス結び目以外の場合も実験的な検証ができる．[KN17] では [GGS13, NO15, GNS+16] で予想されたホモロジー的結び目不変量に対し変数変換 (14) を逆に行なったものを用いて計算を行いトーラス結び目以外の場合でも実験的に Positivity 予想を確認した．

参考文献

[AK05] H. Awata and H. Kanno. Instanton counting, Macdonald functions and the moduli space of D-branes. *JHEP*, 05:039, 2005, arXiv:hep-th/0502061.

[AS12] M. Aganagic and S. Shakirov. Refined Chern-Simons Theory and Knot

Homology. 2012, arXiv:1202.2489.

[AS15] M. Aganagic and S. Shakirov. Knot Homology and Refined Chern-Simons Index. *Commun. Math. Phys.*, 333(1):187–228, 2015, arXiv:1105.5117.

[Ati89] M. Atiyah. Topological quantum field theories. *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.*, 68:175–186, 1989.

[Che13] I. Cherednik. Jones polynomials of torus knots via DAHA. *Int.Math.Res.Not.*, 23:5366–5425, 2013, arXiv:1111.6195.

[GGS13] E. Gorsky, S. Gukov, and M. Stošić. Quadruply-graded colored homology of knots. 2013, arXiv:1304.3481.

[GIKV10] S. Gukov, A. Iqbal, C. Kozcaz, and C. Vafa. Link Homologies and the Refined Topological Vertex. *Commun.Math.Phys.*, 298:757–785, 2010, arXiv:0705.1368.

[GN15] E. Gorsky and A. Negut. Refined knot invariants and Hilbert schemes. *J. Math. Pure. Appl.*, 104:403–435, 2015, arXiv:1304.3328.

[GNS+16] S. Gukov, S. Nawata, I. Saberi, M. Stosic, and P. Sulkowski. Sequencing BPS Spectra. *JHEP*, 03:004, 2016, arXiv:1512.07883.

[GSV05] S. Gukov, A. S. Schwarz, and C. Vafa. Khovanov-Rozansky homology and topological strings. *Lett.Math.Phys.*, 74:53–74, 2005, arXiv:hep-th/0412243.

[GV98a] R. Gopakumar and C. Vafa. M-theory and topological strings. I. 1998, arXiv:hep-th/9809187.

[GV98b] R. Gopakumar and C. Vafa. M-theory and topological strings. II. 1998, arXiv:hep-th/9812127.

[GV99] R. Gopakumar and C. Vafa. On the gauge theory/geometry correspondence. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 3:1415–1443, 1999, arXiv:hep-th/9811131.

[IKV09] A. Iqbal, C. Kozcaz, and C. Vafa. The Refined topological vertex. *JHEP*, 0910:069, 2009, arXiv:hep-th/0701156.

[KN17] M. Kameyama and S. Nawata. Refined large N duality for knots. 2017, arXiv:1703.05408.

[KR08a] M. Khovanov and L. Rozansky. Matrix factorizations and link homology. *Fund. Math.*, 199:1–91, 2008, arXiv:math/0401268.

[KR08b] M. Khovanov and L. Rozansky. Matrix factorizations and link homology II. *Geom. Topol.*, 12(3):1387–1425, 2008, arXiv:math/0505056.

[LMn01] J. Labastida and M. Mariño. Polynomial invariants for torus knots and topological strings. *Commun.Math.Phys.*, 217:423–449, 2001, arXiv:hep-th/0004196.

[LMn02] J. M. Labastida and M. Mariño. A New point of view in the theory of knot and link invariants. *J.Knot Theor.Ramifications*, 11(02):173–197, 2002, arXiv:math/0104180.

[LMnV00] J. Labastida, M. Mariño, and C. Vafa. Knots, links and branes at large N. *JHEP*, 0011:007, 2000, arXiv:hep-th/0010102.

[LP07] K. Liu and P. Peng. Proof of the Labastida-Mariño-Ooguri-Vafa conjecture. 2007, arXiv:0704.1526.

[Mac98] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials.* Oxford university press, 1998.

[MMM+17] A. Mironov, A. Morozov, A. Morozov, P. Ramadevi, V. K. Singh, and A. Sleptsov. Checks of integrality properties in topological strings. *JHEP*, 08:139, 2017, `arXiv:1702.06316`.

[NO15] S. Nawata and A. Oblomkov. Lectures on knot homology. 2015, `arXiv:1510.01795`.

[OV00] H. Ooguri and C. Vafa. Knot invariants and topological strings. *Nucl.Phys.*, B577:419–438, 2000, `arXiv:hep-th/9912123`.

[Yon11] Y. Yonezawa. Quantum $(sl_n, \wedge V_n)$ link invariant and matrix factorizations. *Nagoya Math. J.*, 204:69–123, 2011, `arXiv:0906.0220`.

[ZR12] Zodinmawia and P. Ramadevi. Reformulated invariants for non-torus knots and links. 2012, `arXiv:1209.1346`.

[藤 12] 藤博之. 結び目不変量と量子場の理論, 2012.